A Posteriori Fehleranalysis für Variationsprobleme

Diplomarbeit

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik

eingereicht von: Lena Noack
geb am: 28.05.1984
in: Berlin

Betreuer: Prof. Dr. Carsten Carstensen
2. Gutachter: Prof. Dr. Nicolas R. Gauger

Berlin, den 12. September 2008

Inhaltsverzeichnis

Einführung **III**

Thesen **VII**

1 Minimierung von Energiefunktionalen **1**
1.1 Konvexitätsbedingungen 2

2 AFEM Algorithmus **4**
2.1 Solve 5
2.2 Estimate 5
2.3 Mark 5
2.4 Refine 7
2.5 Prolongation 7
2.6 Adaptiver Algorithmus 8
2.7 Modellierung 8
2.7.1 Modellierung P_1 8
2.7.2 Modellierung $P_0 - RT_0$ 9
2.8 Lösungsalgorithmen 9

3 A Posteriori Fehlerschätzer **11**
3.1 Zuverlässigkeit und Effizienz 11
3.2 Motivation für neue Fehlerschätzer 11
3.3 Abschätzung des Spannungsfehlers 12
3.4 Abschätzung des Residuums 14
3.4.1 Ansatz mit Kantenfehlerschätzer 14
3.4.2 Approximation der zweiten Ableitung 14
3.4.3 Modifizierter Kantenfehlerschätzer 15
3.5 Glättungsfehlerschätzer 17
3.6 Allgemeiner zuverlässiger Fehlerschätzer 17
3.7 Gemischter Primaler-Dualer Fehlerschätzer 19

4 Dualitätstheorie nach Repin **21**
4.1 Notationen und Definitionen 21
4.2 A Posteriori Fehlerschätzungen 22
4.3 Anwendung auf das Optimal Design Problem 26

5 Zielorientierte Ansätze **27**
5.1 Motivation für die DWR Methode . . . 27
5.2 Allgemeine DWR Methode . . . 27
5.2.1 Primale Fehlerschätzer . . . 27
5.2.2 Duales Problem . . . 28
5.2.3 Duale Fehlerschätzer . . . 28
5.2.4 Nichtlineare Probleme . . . 29
5.3 Lösen des dualen Problems . . . 30
5.4 Anwendung auf konvexe Minimierungsprobleme . . . 30
5.4.1 Fehlerschätzer . . . 31
5.4.2 P_1-Modellierung . . . 33
5.4.3 $P_0 - RT_0-$Modellierung . . . 35
5.5 Zielorientierte Netzverfeinerung . . . 38
5.5.1 Mittelwert der Lösung . . . 38
5.5.2 Mittelwert des Gradienten . . . 38
5.5.3 Spannungsfehler . . . 39

6 Numerische Testbeispiele **40**
6.1 Konstruktion von Testbeispielen mit bekannter Lösung . . . 40
6.2 Numerische Beispiele . . . 41
6.2.1 Optimal Design Problem . . . 41
6.2.2 2-Well Benchmark . . . 45
6.2.3 $p-$Laplace Problem . . . 49
6.3 Lagrange-Multiplikator für das Optimal Design Problem . . . 50

7 Auswertung der Fehlerschätzer **52**
7.1 Fehlerschätzerübersicht . . . 52
7.2 Fehlermaß . . . 55
7.3 Optimal Design Problem . . . 56
7.4 $2-$Well Benchmark Problem . . . 70
7.5 Laplace Problem . . . 74
7.6 Auswertung der numerischen Testbeispiele . . . 78

A Optimalität des AFEM Algorithmus **80**
A.1 Baumstrukturen aus der Grafentheorie . . . 81
A.2 NVB-Verfeinerung . . . 81
A.3 RGB-Verfeinerung . . . 82
A.4 Überlagerung zweier Bäume . . . 85
A.5 Optimale Netzverfeinerung . . . 93

Anhang **i**

Einführung

Die adaptive Finite Elemente Methode (*AFEM*) wird als Standardmethode zur numerischen Behandlung von partiellen Differentialgleichungen benutzt. Die Notwendigkeit numerischer Methoden entsteht bei Problemen, für die keine analytische Lösung bekannt ist. Besonders in der Physik entstehen viele Differentialgleichungsprobleme, die nur numerisch lösbar sind.

Ein bekanntes Beispiel aus der Elastizitätstheorie, das Optimal Design Problem, beschäftigt sich mit der Konstruktion eines dreidimensionalen Balkens, welcher aus zwei verschiedenen Materialien in gleichen Verhältnissen bestehen soll. Abhängig von der Verteilung dieser Materialien ändert sich die Torsionssteifheit des Balkens. Diese Steifheit soll unter Einfluss äußerer Kräfte maximal werden, so dass nur minimale Verzerrungen auftreten. Zur einfacheren numerischen Umsetzung wird der Querschnitt durch den Balken analysiert. Auch dieses Problem ist nur numerisch lösbar.

Das Optimal Design Problem ist ein Beispiel aus der Klasse von Minimierungsproblemen der Gestalt

$$(P) \qquad \min_{v \in V} E(v), \quad E(v) = \int_\Omega W(Dv) + \alpha |v - f_0|^2 - fv \; dx. \tag{1}$$

Weitere bekannte Vertreter dieser Klasse bilden das $2-$Well Benchmark Problem, welches unter anderem in [21, 23] diskutiert wird und numerisch schwieriger zu handhaben ist, und das $p-$Laplace Problem, welches als Energiedichte eine einfache Betragsfunktion enthält. Die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung u ist für Minimierungsprobleme der Gestalt (P) meist nicht gegeben [23], daher wird das Problem in eine konvexe Gestalt übertragen, die eine eindeutige Lösung für die Spannung liefert,

$$(KP) \qquad \min_{v \in V} E(v), \quad E(v) = \int_\Omega W(Dv) + \alpha |v - f_0|^2 - fv \; dx, \tag{2}$$

wobei die Energie E und die Energiedichte W konvex sind.
Dieser Ansatz der Konvexifizierung liefert degenerierte konvexe Minimierungsprobleme, welche in dieser Arbeit untersucht werden. Der Fehler der Spannung $\sigma := DW(Du)$ gegenüber der Spannung des eigentlichen Problems ist unabhängig von u sehr gering, während für die Lösung u selbst keine Vergleiche geführt werden können, da eine Lösung des nicht-konvexen Falls eventuell nicht existiert.

Bei dem Optimal Design Problem entstehen durch die Konvexifizierung des Problems sogenannte Kontaktzonen, in denen es zu einer Vermischung der Materialien kommt. In Abbildung 1 wird die Verteilung der Materialien auf einem L-förmigen Gebiet und einem Schlitzgebiet grafisch dargestellt. Die Verteilungsfunktion besitzt den Funktionswert 1 an den Stellen, an denen nur das erste Material auftaucht, und 0 an den Stellen, an denen nur das zweite Material vorliegt. An allen anderen Stellen tritt eine Vermischung der Materialien auf.

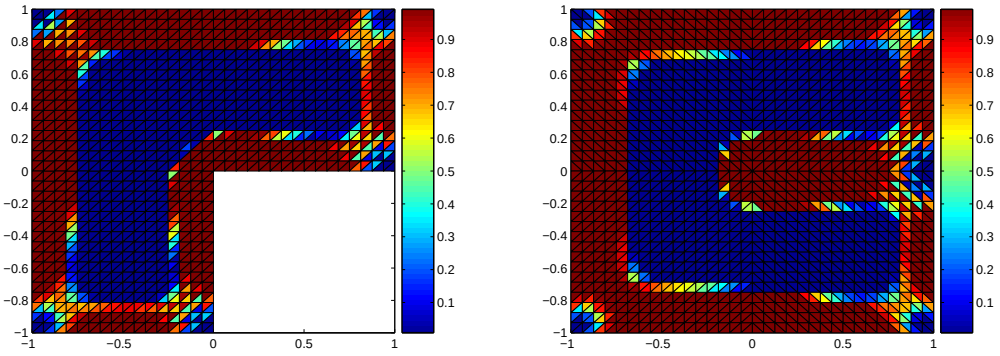


Abbildung 1: Diskrete Verteilung der Materialien auf dem L-förmigen Gebiet und dem Schlitzgebiet. Rot markierte Flächen stehen für das erste Material, blau markierte Flächen für das zweite Material. Die anderen Flächen bilden die Kontaktzone der Materialien, es tritt eine Vermischung dieser auf.

Für die adaptive Netzverfeinerung des AFEM Algorithmus benötigt man Fehlerschätzer, die den Spannungsfehler bis auf Konstanten von oben und von unten abschätzen. Für diese Problemklasse konnten bisher jedoch keine Fehlerschätzer gefunden werden, die dieser Bedingung genügen, was zu der sogenannten *Zuverlässigkeits-Effizienz-Lücke* führt [4, 7, 18, 21, 22, 23].

Diese motiviert eine genauere Untersuchung der Problemklasse und Konstruktion neuer Fehlerschätzer, was in der vorliegenden Diplomarbeit erfolgt. Es werden mehrere verschiedene Ansätze verfolgt, um Fehlerschätzer herzuleiten, die die Zuverlässigkeits-Effizienz-Lücke verkleinern bzw. für spezielle Problemtypen schließen sollen.

In Abbildung 2 wird der Kantenfehlerschätzer $\eta_\ell^{(1)}$ mit dem Fehlermaß δ_ℓ verglichen, welcher die gleiche Konvergenzrate wie der Spannungsfehler besitzt. Da die exakte Spannung σ jedoch unbekannt ist, muss das Fehlermaß, siehe Abschnitt 7.2, hinzugezogen werden. In der Grafik wird die Zuverlässigkeits-Effizienz-Lücke des Kantenfehlerschätzers deutlich. Er ist zuverlässig, jedoch besitzt er keine ausreichende Konvergenzrate.
Der neue modifzierte Kantenfehlerschätzer $\eta_\ell^{(2)}$ jedoch, für den in Abschnitt 3.4.3 unter bestimmten Voraussetzungen Zuverlässigkeit und Effizienz bewiesen werden, zeigt für das Optimal Design Problem zuverlässiges und effizientes Verhalten.

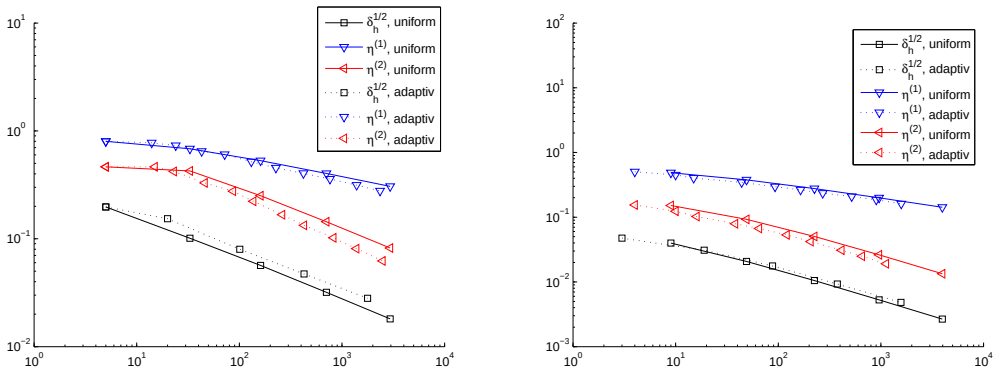


Abbildung 2: Kantenfehlerschätzer $\eta_\ell^{(1)}$ und modifizierter Kantenfehlerschätzer $\eta_\ell^{(2)}$ im Vergleich zum Fehlermaß $\delta_\ell^{1/2}$ für das Optimal Design Problem auf dem L-förmigen Gebiet und das Laplace Problem auf dem Einheitsquadrat. Der erste Fehlerschätzer ist zuverlässig, jedoch nicht effizient. Das Fehlen einer $h-$Potenz konnte mit dem zweiten Fehlerschätzer umgangen werden.

In dieser Arbeit werden unterschiedliche Ansätze untersucht, um zuverlässige und effiziente Fehlerschätzer zu finden. Nach einer allgemeinen Einführung in Minimierungsprobleme in Kapitel 1 und der Darstellung des AFEM Algorithmus in Kapitel 2 werden in den Kapiteln 3 bis 5 verschiedene Fehlerschätzer hergeleitet.
Zuerst wird in Kapitel 3 nach einem klassischen Ansatz das Residuum des Fehlers auf unterschiedliche Arten und unter verschiedenen Voraussetzungen abgeschätzt und Zuverlässigkeit bewiesen.
Ein Ansatz von Repin wird in Kapitel 4 verfeinert und auf das Optimal Design Problem angewendet.
In Kapitel 5 werden nichtlineare duale Probleme betrachtet, welche für das durch die Arbeiten von Rannacher und anderen als *DWR Methode* bekannt gewordene Verfahren benötigt werden. Aus dieser Methode werden verschiedene Fehlerschätzer hergeleitet, die aus primalen Residuen und primalen oder dualen Gewichten bestehen.
Das duale Problem der DWR Methode sollte nicht mit dem dualen Problem des Repin-Ansatzes aus Kapitel 4 verwechselt werden, welches durch die konjugierte Energie definiert wird und direkt von dem primalen Problem abhängt.
Ausgehend von der DWR Methode wird ein Ansatz der sogenannten Zielfunktionale betrachtet, mit denen die Netzverfeinerung problemspezifisch beeinflusst werden kann. Für ein Zielfunktional hat sich durch die numerischen Auswertungen ergeben, dass der Fehler im Zielfunktional eine gute Approximation des Spannungsfehlers darstellt. Es wurde ein Residualfehlerschätzer abhängig von dem Zielfunktional hergeleitet, der ebenfalls eine gute Approximation des Spannungsfehlers darstellt.

Eine Auswertung der neuen Fehlerschätzer für die numerischen Beispiele, welche in Kapitel 6 vorgestellt werden, findet in Kapitel 7 statt. Abhängig von den Problemen und der Art der Verfeinerung wurden neue Fehlerschätzer hergeleitet, die numerisch effizientes Verhalten zeigen.

So weisen der modifizierte Kantenfehlerschätzer $\eta_\ell^{(2)}$ sowie der Residualfehlerschätzer $\eta_\ell^{(4)}$ für das Laplace Problem zuverlässiges und effizientes Verhalten auf. Für das numerisch komplizierte 2−Well Benchmark Problem zeigen diese Fehlerschätzer bei adaptiver Verfeinerung zuverlässiges und effizientes Verhalten. Bei uniformer Verfeinerung jedoch wird der Fehler etwas zu schwach abgeschätzt, hier wären Untersuchungen mit mehr Freiheitsgraden wichtig, diese sind jedoch mit den mir zur Verfügung stehenden Mitteln nicht möglich. Die beiden Fehlerschätzer werden in Abbildung 3 für alle untersuchten Probleme zusammengefasst.

Die Zuverlässigkeits-Effizienz-Lücke wurde damit nicht allgemein für alle Beispiele geschlossen, jedoch stark verkleinert. Hier müssen in Zukunft Rechnungen mit mehr Freiheitsgraden ausgeführt werden, mit denen die Vermutung der numerischen Effizienz des modifizierten Kantenfehlerschätzers und des Residualfehlerschätzers eventuell bestätigt werden können.

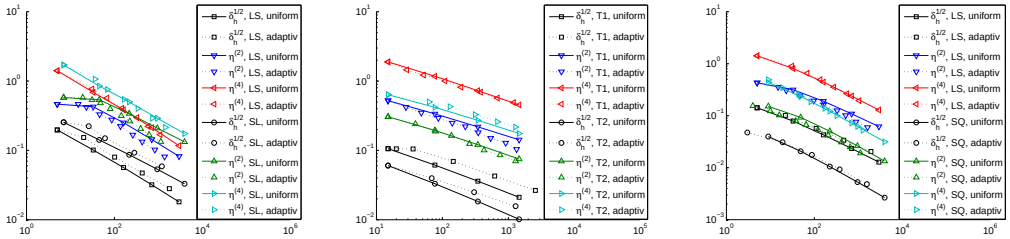


Abbildung 3: Fehlerschätzer $\eta_\ell^{(2)}$ und $\eta_\ell^{(4)}$ im Vergleich zu dem Fehlermaß $\delta_h^{1/2}$ für das Optimal Design Problem, das 2−Well Benchmark Problem und das lineare Laplace Problem. Zur besseren Übersicht wurden die Gebietsbezeichnungen abgekürzt. Dabei steht LS *für das L-förmige Gebiet,* SL *für das Schlitzgebiet und* SQ *für das Einheitsquadrat. Bei dem* 2−*Well Benchmark Problem wird zwischen dem Beispiel* T1 *mit vorgegebenen Randdaten u_D und Funktion f_0, siehe Abschnitt* 6.2.2*, und dem Beispiel* T2 *mit $u_D \equiv 0$ und $f_0 \equiv 1$ unterschieden.*

Als Anlage zu der Diplomarbeit wird die Optimalität des AFEM Algorithmus untersucht und die Optimalität der Netzverfeinerung bewiesen. Dieser Abschnitt ist eine Zusammenfassung meiner Forschungsarbeit an der Humboldt-Universität in Zusammenarbeit mit Hella Rabus, der ich hiermit herzlich für ihre Unterstützung danke.

Weiterhin möchte ich mich bei Prof. Carsten Carstensen bedanken, der diese Diplomarbeit angeregt und betreut hat. Mein Dank gilt ebenfalls den weiteren Mitarbeitern der Humboldt-Universität, die mich unterstützt haben, besonders Joscha Gedicke und Robert Huth.

Thesen

- In der vorliegenden Diplomarbeit wurde die Klasse der degenierten konvexen Minimierungsprobleme für allgemeine lineare und nichtlineare konvexe Energiedichten untersucht.
- Für diese Klasse gab es bisher keine zuverlässigen und effizienten Fehlerschätzer, d.h.

  $$\eta_\ell \lesssim \|\sigma - \sigma_\ell\|_{L^{r/t}} \lesssim \eta_\ell$$

  konnte bisher nicht für allgemeine Minimierungsprobleme erfüllt werden. Die Parameter r, t sind problemabhängig und werden in Abschnitt 3.6 angegeben.
- Der Kantenfehlerschätzer ist zuverlässig. Die Effizienz wurde in Satz 3.3.3 nur unter den Bedinungen $u \in H_3$ und $r = 2$ gezeigt. Für die untersuchten Beispiele dieser Diplomarbeit ist die erste Bedingung nicht erfüllt, so dass eine Zuverlässigkeits-Effizienz-Lücke entsteht. Die numerischen Rechnungen bestätigen, dass der Kantenfehlerschätzer nicht effizient ist, wenn die erste Bedingung nicht erfüllt ist.
- In der vorliegenden Arbeit wurden verschiedene Ansätze benutzt, um zuverlässige und effiziente Fehlerschätzer herzuleiten. Deren Zuverlässigkeit bzw. Effizienz wurde abhängig von den Parametern r, t bewiesen.
- Mit klassischen Residualabschätzungen wurde ein neuer Fehlerschätzer hergeleitet, der modifizierte Kantenfehlerschätzer, für den unter der Bedingung $r = 2$ Zuverlässigkeit und Effizienz bewiesen wurde, siehe Abschnitt 3.4.3.
- Für den Glättungsfehlerschätzer aus Abschnitt 3.5 wurde Zuverlässigkeit und Effizienz bis auf Terme höherer Ordnung gezeigt.
- Der zuverlässige Residualfehlerschätzer aus [23] wurde mit in die Untersuchungen der Minimierungsprobleme einbezogen. In dieser Diplomarbeit konnte für diesen Fehlerschätzer numerische Effizienz gezeigt werden.
- Über den klassischen Dualitätsansatz aus der nichtlinearen Optimierung wurde ein weiterer Fehlerschätzer für die gemischte Formulierung des Optimal Design Problems hergeleitet, dessen Zuverlässigkeit wurde in Abschnitt 3.7 bewiesen. Für diesen Fehlerschätzer gilt jedoch keine numerische Effizienz.
- Die Dualitätstheorie nach Repin wurde detaillierter ausgearbeitet und die Hauptaussagen wurden verallgemeinert. Aus dieser Theorie wurde in Abschnitt 4.3 eine neuer Fehlerschätzer für das Optimal Design Problem hergeleitet, für den Zuverlässigkeit gezeigt wurde. Numerisch konnte keine Effizienz nachgewiesen werden.

- Die DWR Methode von Rannacher wurde auf die zu untersuchende Problemklasse angewendet. Dadurch wurden zwei primale und zwei duale Fehlerschätzer motiviert. Ein neuer Fehlerschätzer, der Medium Fehlerschätzer, wurde in Abschnitt 5.4.1 hergeleitet und besteht wie die beiden anderen Fehlerschätzer der DWR Methode aus einem primalen Residuum und einem primalen oder dualen Gewicht.
  Für die primalen Varianten der drei Fehlerschätzer gilt für alle Testbeispiele numerische Zuverlässigkeit und Effizienz bei uniformer Verfeinerung. Bei adaptiver Verfeinerung wird der Spannungsfehler jedoch zu optimistisch abgeschätzt.

- Das für die dualen Fehlerschätzer zu lösende duale Problem hängt von einem Zielfunktional ab. Für ein Zielfunktional wurde ein Residual-Fehlerschätzer hergeleitet, für den gezeigt wurde, dass er den Fehler im Zielfunktional zuverlässig und effizient abschätzt. Die numerischen Rechnungen haben ergeben, dass der Fehler im Zielfunktional für $r = 2, t = 1$ eine gute Approximation des Spannungsfehlers darstellt.

- Zwei weitere Zielfunktionale wurden untersucht und zu zielorientierten Netzverfeinerungen benutzt. Dazu wurden die Zielfunktionale nur auf einem Teilbereich des Gebietes definiert, siehe Abschnitt 5.5.

- Für die numerische Evidenz wurden drei Testbeispiele aus der Klasse der degenerierten konvexen Minimierungsprobleme ausgewählt.
  Das Optimal Design Problem wurde bereits in einer anderen Diplomarbeit numerisch umgesetzt [29]. Dazu wurde das Programmpaket F_FW der Humboldt-Universität benutzt [13]. Für das Optimal Design Problem wurde auch die gemischte Formulierung umgesetzt. Die für die Relation $\sigma = DW(Du)$ benötigte Energiedichte $W(Du)$ ist jedoch für das Optimal Design Problem nur konvex, nicht streng-konvex. Daher wird diese Relation durch $Du \in \partial W^*(\sigma)$ ersetzt, wobei $W^*(\sigma)$ die konjugierte (duale) Energiedichte ist. Diese ist streng konvex und damit numerisch sinnvoller. Diese Funktion ist jedoch nicht differenzierbar, daher wird sie regularisiert, siehe Abschnitt 6.2.1. Diese Regularisierung ist abhängig von einem Regularisierungsparameter $\varepsilon > 0$. Die Bedingung wird für die Anwendbarkeit der DWR Methode benötigt, siehe Satz 5.2.1. Numerisch liefert $\varepsilon = 0$ jedoch die gleichen Ergebnisse wie die regularisierte Variante mit $\varepsilon \leq 10^{-5}$.
  Das 2−Well Benchmark Problem aus [21, 23] sowie das lineare Laplace Problem wurden neu in dieses Programmpaket integriert. Der grobe Programmablauf sowie eine Zusammenfassung der Hauptfunktionen sind im Anhang gegeben.
  Die vorher erarbeiteten Ergebnisse konnten numerisch belegt werden.

- Als Anlage zu dieser Diplomarbeit wird die Optimalität der Netzverfeinerung des vorgestellten AFEM Algorithmus für RGB-Verfeinerungen (*Rot-Grün-Blau*) bewiesen. Dies verallgemeinert die Aussagen von [9, 37, 38] von NVB-Verfeinerungen (*Newest Vertex Bisection*) auf RGB-Verfeinerungen. Dieser Abschnitt ist eine Zusammenfassung meiner Forschungsarbeit an der Humboldt-Universität und ist in Zusammenarbeit mit Hella Rabus entstanden.

Kapitel 1

Minimierung von Energiefunktionalen

Die Minimierungsprobleme der Gestalt (2) werden in detaillierten Ausführungen z.B. in [4] oder [18] beschrieben.

Die Existenz und Eindeutigkeit eines Minimums kann im Allgemeinen nicht garantiert werden. So könnte es mehrere Minimierer oder sogar keine Lösung geben.
Nach [23] kann das Problem jedoch verallgemeinert werden, so dass eine Lösung mit einer Verschiebung u und einem Young-Maß ν existiert mit

$$Du(x) = \int_{\mathbb{R}^n} Id(y) d\nu_x(y) =: < Id, \nu_x > .$$

Zu dem verallgemeinerten Problem,

$$(AP) \qquad \min_{v \in V, \nu_x \in YM} \tilde{E}(v, \nu_x), \quad \tilde{E}(v, \nu_x) = \int_\Omega < \tilde{W}(Dv), \nu_x > + \alpha |v - f_0|^2 - fv \; dx,$$

mit YM als Raum der Young-Maße auf Ω, existiert eine Spannung

$$\sigma := \int_{\mathbb{R}^n} DW(y) d\nu(y).$$

Aus der Optimierung ist bekannt, dass ein eindeutiges Minimum existiert, falls die zu minimierende Funktion konvex ist. Damit die nicht-konvexen Minimierungsprobleme analytisch und numerisch untersucht werden können, muss eine (Quasi-)Konvexifizierung der Probleme vorgenommen werden, die möglichst nah an dem eigentlichen Problem liegt.

$$(KP) \qquad \min_{v \in V} E(v), \quad E(v) = \int_\Omega W(Dv) + \alpha |v - f_0|^2 - fv \; dx.$$

Eine Möglichkeit ist dabei, die Energiedichte $\tilde{W}(Dv)$ durch ihre konvexe Hülle zu ersetzen.

Die Berechnung der Lösung des konvexifizierten Problems ist dann ausreichend. Die Spannung des konvexifizierten Problems,

$$\sigma := DW(Du),$$

entpricht der Spannung des verallgemeinerten Problems, so dass der Spannungsfehler von großem Interesse ist und als Fehlervergleich herangezogen wird.

Bei der Konvexifizierung des Problems verliert man jedoch gewisse Regularitätsbedingungen für die Lösung u, daher spricht man allgemein von *degenerierten konvexen Minimierungsproblemen*. Bei dieser Problemklasse konnten bisher mit klassischen Ansätzen aufgrund der fehlenden Regularität der Lösung keine zuverlässigen und effizienten Fehlerschätzer gefunden werden, mittels derer die adaptive Gitterverfeinerung gesteuert werden kann. Dieses Problem ist unter dem Namen *Zuverlässigkeits-Effizienz-Lücke* bekannt geworden.

1.1 Konvexitätsbedingungen

Die Konvexitätsbedingungen für die Energiedichte $W : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ für Konstanten $1 < q < \infty,\ 1 \le r < \infty$ und $0 \le s < \infty$ lauten

$$\max\{(1 + s/r)/(1 - 1/r)\ ,\ 2n/(n + 2)\} \le q,$$

(H1) $|F|^q - 1 \lesssim W(F) \lesssim 1 + |F|^q$ für alle $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$,

(H2) $(1 + |A|^s + |B|^s)^{-1}\ |DW(A) - DW(B)|^r \lesssim W(B) - W(A) - DW(A) : (B - A)$
für alle $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, wobei ':' das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^{m\times n}$ bezeichnet.

Bemerkung 1.1.1. *Die Konvexitätskontrolle* (H2) *impliziert die Monotoniebedingung*

(H3) $(1 + |A|^s + |B|^s)^{-1}\ |DW(A) - DW(B)| \lesssim (DW(B) - DW(A)) : (B - A)$

Die Energiedichte W aus (2) erfülle die obigen Bedingungen. Dann ist für das Minimierungsproblem

$$u \in \arg\min_{v\in V} E(v) \tag{1.1}$$

die Existenz eines Minimums $u \in V$ oder $u_\ell \in V_\ell \subseteq V$ durch (H1)–(H2) garantiert, die Eindeutigkeit ist im Allgemeinen jedoch nicht erfüllt.

Die exakte bzw. diskrete Spannung ist definiert über

$$\begin{aligned} \sigma &:= DW(Du) \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega), \\ \sigma_\ell &:= DW(Du_\ell) \in L^{r/t}(\Omega) \end{aligned}$$

für $f \in L^2(\Omega)$.
Es gilt, dass σ und σ_ℓ eindeutig sind, sie hängen demnach nicht von der Wahl von u bzw. u_ℓ ab [18, 23].

Bemerkung 1.1.2. *Nach* [22] *gilt für die Spannung*

$$\begin{aligned} & \sigma \in H(div;\Omega), \\ f \in L^2(\Omega) \quad &\Rightarrow \quad \sigma \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ und} \\ f \in W^{1,p}_0(\Omega) \text{ mit glattem Rand } \partial\Omega \quad &\Rightarrow \quad \sigma \in W^{1,p}(\Omega). \end{aligned}$$

Satz 1.1.3 (Konvergenztheorem)**.** *Seien* (H1)–(H2) *erfüllt und gelte*

$$\lim_{\ell\to\infty} \mathrm{osc}_\ell = 0.$$

Dann konvergiert die Folge der Spannungsfelder σ_ℓ stark gegen das exakte Spannungsfeld σ in $L^{r/t}(\Omega;\mathbb{R}^{m\times n})$.

Beweis.
Das Theorem wird in [18] bewiesen. □

Kapitel 2

AFEM Algorithmus

Bei der Finite Elemente Methode wird die Lösung des Problems (2) auf verschieden feinen Gittern ermittelt. Diese immer feineren Gitter erhält man durch Verfeinerungen der Elemente, speziell durch gezieltes Halbieren der Kanten. Bei uniformen Verfeinerungen werden alle Kanten halbiert.
Bei der adaptiven Finite Elemente Methode (AFEM) wird nur ein Teil der Kanten halbiert. Diese werden in einem Markierungsschritt ermittelt. Tauchen bei der zu bestimmenden Lösung z.B. Singularitäten oder starke Oszillationen auf, muss das Gitter an diesen Stellen sehr fein sein, um eine befriedigende Approximation der Lösung zu erhalten. An anderen Stellen des Gebietes ist die Lösung jedoch genügend glatt, und starke Verfeinerungen des Gitters an diesen Stellen verbrauchen unnötigen Speicherplatz und Rechenaufwand.
Daher benutzt man sogenannte Fehlerschätzer, welche auf starke Fehler, genauer auf starke Singularitäten oder Oszillationen, hindeuten, so dass an diesen Stellen stärker verfeinert wird.

Der AFEM Algorithmus besteht in seiner einfachsten Form aus vier Schritten:

$$\text{SOLVE} \rightarrow \text{ESTIMATE} \rightarrow \text{MARK} \rightarrow \text{REFINE}.$$

Für die Minimierungsaufgaben werden mithilfe eines Newton-Verfahrens Nullstellen der ersten Ableitung des Energiefunktionals bestimmt. Dies wird in Abschnitt 2.8 detaillierter erklärt. Für Verfahren dieser Art wird ein Startwert benötigt, der möglichst nah an der Lösung liegen sollte. Dieser Startwert wird durch eine Prolongation ermittelt, so dass der erweiterte AFEM Algorithmus nun lautet

$$\text{SOLVE} \rightarrow \text{ESTIMATE} \rightarrow \text{MARK} \rightarrow \text{REFINE} \rightarrow \text{PROLONG}.$$

Der AFEM Algorithmus wird so lange in einer Schleife ausgeführt, bis ein vorher gewähltes Abbruchkriterium erreicht ist. In dieser Arbeit wurde als Abbruchkriterium die Anzahl der Freiheitsgrade gewählt.

2.1 Solve

Im Schritt SOLVE wird das Minimierungsproblem

$$E(u_\ell) = \min_{v_\ell \in V_\ell} E(v_\ell), \quad E(v_\ell) = \int_\Omega W(Dv_\ell)dx + \alpha \int_\Omega |v_\ell - f_0|^2 dx - \int_\Omega f v_\ell dx$$

gelöst, indem die Nullstelle u_ℓ der ersten Ableitung des Energiefunktionals ermittelt wird. Diese Nullstelle bildet dann eine Extremstelle des Minimierungsproblems. Da das Energiefunktional konvexifiziert wurde, muss diese Extremstelle ein Minimum darstellen.

Der diskrete Raum definiert sich durch $V_\ell := V \cap \mathrm{P}_1(\mathcal{T}_\ell)$ (bzw. $V_\ell \times Q_\ell := (V \cap \mathrm{P}_0(\mathcal{T}_\ell)) \times (Q \cap \mathrm{RT}_0(\mathcal{T}_\ell))$ in der gemischten Formulierung).

Die entsprechenden Lösungsalgorithmen zur Bestimmung der Nullstelle werden in Abschnitt 2.8 vorgestellt.

Setze $\sigma_\ell := DW(Du_\ell)$.

2.2 Estimate

In ESTIMATE wird der für die Markierung benötigte Fehlerschätzer definiert. Da bei wissenschaftlich interessanten numerischen Berechnungen die exakte Spannung σ bzw. der Spannungsfehler $\sigma - \sigma_\ell$ nicht bekannt ist, muss ein geeigneter Fehlerschätzer gefunden werden, der den Spannungsfehler abschätzt, das heißt für den Fehlerschätzer η_ℓ sollte idealerweise die Gleichung

$$\|\sigma - \sigma_\ell\|_{L^{r/t}(\Omega)} \lesssim \eta_\ell \lesssim \|\sigma - \sigma_\ell\|_{L^{r/t}(\Omega)}$$

erfüllt sein. Diese Eigenschaft wird jedoch zur Zeit von keinem bekannten Fehlerschätzer für die gesamte Problemklasse der degenerierten konvexen Minimierungsprobleme erfüllt. Dies ist die Zuverlässigkeits-Effizienz-Lücke.

2.3 Mark

In dem Markierungsschritt werden mehrere Kanten der Elemente aus der Triangulierung $\mathcal{T}$ markiert, die dann im nächsten Schritt halbiert werden. Damit entsteht eine adaptive Gitterverfeinerung, da nicht alle Kanten $E \in \mathcal{E}$ verfeinert werden, wie es bei einer uniformen Verfeinerung der Fall wäre.

Für die Markierung der Kanten wird der Fehlerschätzer η_ℓ aus dem vorigen Schritt verwendet. Die markierten Kanten werden in der Menge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}$ gespeichert. Es gibt unterschiedliche Varianten, wie die Kantenmarkierung erfolgen soll.

Bei dem *Maximum-Kriterium* wird die Hälfte des maximalen Wertes des Fehlerschätzers als Referenzwert gewählt, so dass alle Kanten markiert werden, auf denen der Fehlerschätzer größer als der Referenzwert ist. Ist jedoch der Fehler der approximierten Lösung an einer

Stelle (z.B. an einer Singularität) gegenüber den anderen Kanten sehr hoch, so wird unter Umständen nur diese eine Kante verfeinert. Diese Art der Verfeinerung wäre jedoch nicht effektiv, da dann sehr viele Verfeinerungslevel nötig wären um das Abbruchkriterium zu erreichen.

Daher wird in gängigen AFEM Programmen das *bulk-Kriterium* benutzt. Dazu werden die Werte des Fehlerschätzers der Größe nach sortiert. Nun werden von der größten Kante an alle Kanten der Reihe nach markiert, bis

$$\frac{1}{\theta}\sum_{E\in\mathcal{E}}\eta_E^2 \leq \sum_{E\in\mathcal{M}}\eta_E^2$$

für ein vorher bestimmtes $\theta \in (0,1)$ erfüllt ist. In den numerischen Experimenten wurde $\theta = 0.5$ gewählt.

Nach dem Markieren der Kanten wird ein Closure Algorithmus benötigt, so dass die Winkelbedingung nicht verletzt wird. Diese ist gegeben durch

$$\max_{\alpha\in\alpha(T)} << \pi \quad \text{und} \quad 0 << \min_{\alpha\in\alpha(T)}, \tag{2.1}$$

wobei $\alpha(T)$ die Menge der Innenwinkel von T ist.

Definition 2.3.1. (Regularitätseigenschaft (R)).
Sei $\mathcal{E}$ die Menge aller Kanten einer regulären Triangulierung $\mathcal{T}$. $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}$ sei die Menge der markierten Kanten und $E : \mathcal{T} \to \mathcal{E}$ die Abbildung, welche die Referenzkanten definiert. $\mathcal{M}$ erfüllt (R) genau dann, wenn

$$\forall T \in \mathcal{T}: \quad \mathcal{M} \cap \mathcal{E}(T) = \emptyset \text{ or } E(T) \in \mathcal{M}, \tag{2.2}$$

mit $\mathcal{E}(T) := \{E \in \mathcal{E} | E \subset \partial T\}$.

Algorithmus 2.3.2. (Closure der *rot-grün-blau* Verfeinerung).
INPUT: *Reguläre Triangulierung $\mathcal{T}$, $\mathcal{E}$ sei die Menge aller Kanten, $E : \mathcal{T} \to \mathcal{E}$ sei die Referenzkantenabbildung und $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}$ die Menge der markierten Kanten.*
LOOP: $\ell := 0$, $\mathcal{M}^{(0)} := \mathcal{M}$, $\mathcal{N}^{(0)} := \mathcal{M}$.
`while` $\mathcal{N}^{(\ell)} \neq \emptyset$ `do`

i. *Wähle $E \in \mathcal{N}^{(\ell)}$ mit Nachbardreiecken $T_\pm \in \mathcal{T}$, d.h. $E \subset \partial T_\pm$ (oder mit nur einem Nachbar T_+, falls E Teil des Randes ist).*

ii. $\mathcal{M}^{(\ell+1)} := \mathcal{M}^{(\ell)} \cup \{E_+, E_-\}$ *(bzw.* $\mathcal{M}^{(\ell+1)} := \mathcal{M}^{(\ell)} \cup \{E_+\}$ *falls E Außenkante) für Referenzkante $E_\pm := E(T_\pm)$ des Dreiecks $T_\pm$.*

iii. $$\mathcal{N}^{(\ell+1)} := \begin{cases} \mathcal{N}^{(\ell)}\backslash\{E\} & \text{if } \mathcal{M}^{(\ell)} = \mathcal{M}^{(\ell+1)}, \\ (\mathcal{N}^{(\ell)} \cup \{E_+, E_-\})\backslash\{E\} & \text{if } \mathcal{M}^{(\ell)} \neq \mathcal{M}^{(\ell+1)}. \end{cases}$$

iv. $\ell := \ell + 1$. *Gehe zu (i).*

`end while`
OUTPUT: $\hat{\mathcal{M}} := \mathcal{M}^{(\ell+1)}$.

Korollar 2.3.3. (Eigenschaften des Closure Algorithmus).

(a) Der Algorithmus bricht nach einer endlichen Zahl von Schritten ab.

(b) $\hat{\mathcal{M}}$ *erfüllt (R).*

(c) $\hat{\mathcal{M}}$ *ist minimal mit (R) und* $\mathcal{M} \subseteq \hat{\mathcal{M}}$*, d.h. für alle Mengen* $\overline{\mathcal{M}}$ *mit (R) und* $\mathcal{M} \subseteq \overline{\mathcal{M}}$ *gilt* $\hat{\mathcal{M}} \subseteq \overline{\mathcal{M}}$*.*

2.4 Refine

Die Verfeinerungen erfolgen abhängig von den markierten Kanten. Wurden alle Kanten markiert, so entsteht eine uniforme Verfeinerung, bei der aus jedem Dreieck $T \in \mathcal{T}_\ell$ vier Teildreiecke $T_1, T_2, T_3, T_4 \in \mathcal{T}_{\ell+1}$ entstehen.

Bei der adaptiven Verfeinerung wird jedes Dreieck $T \in \mathcal{T}_\ell$ abhängig von den markierten Kanten $\mathcal{M}(T)$ verfeinert. Die verschiedenen Varianten werden in Abbildung 2.1 aufgeführt.

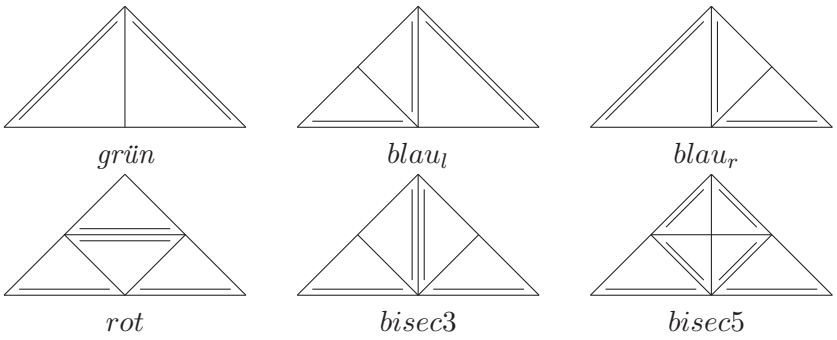


Abbildung 2.1: Verschiedene Verfeinerungsmöglichkeiten eines Dreiecks abhängig von der Anzahl der markierten Kanten. Die doppelten Linien kennzeichnen die jeweiligen Referenzkanten für den nächsten Verfeinerungsschritt.

2.5 Prolongation

Für die numerische Berechnung der Nullstelle von $DE(v)$ benötigt man einen möglichst guten Startwert für den Lösungsalgorithmus, da sonst unnötig viele Iterationsschritte gebraucht werden, was leicht vermieden werden kann.

Nachdem das Gitter von $\mathcal{T}_{\ell+1}$ mittels `REFINE` erstellt wurde, wird die Lösung der alten Triangulierung $\mathcal{T}_\ell$ auf $\mathcal{T}_{\ell+1}$ projiziert. Dank dieser Prolongation verkleinert sich die Anzahl der Iterationsschritte deutlich.
Ohne Prolongation erhält man mit dem Newton-Verfahren (siehe Abschnitt 2.8) auch mit 100 Iterationsschritten noch keine vernünftige Lösung, mit der Prolongation konvergiert der Algorithmus bereits nach 5-20 Iterationsschritten abhängig vom Problem.

2.6 Adaptiver Algorithmus

Der Algorithmus der adaptiven Gitterverfeinerung wird in 2.6.1 gegeben. Die Mengen der markierten Kanten wurden in dem Schritt `MARK` ermittelt, die Verfeinerungen finden in dem Schritt `REFINE` statt.

Algorithmus 2.6.1. (Adaptive Gitterverfeinerung).
INPUT: *Sei die Triangulierung $\mathcal{T}^{(0)}$ regulär und $\mathcal{E}$ die Menge aller Kanten, $E^{(0)} : \mathcal{T}^{(0)} \to \mathcal{E}^{(0)}$ sei die Referenzkantenabbildung und $\mathcal{M}^{(0)} \subseteq \mathcal{E}^{(0)}$, $\mathcal{M}^{(1)} \subseteq \mathcal{E}^{(1)}$, ..., $\mathcal{M}^{(L)} \subseteq \mathcal{E}^{(L)}$ seien die Mengen der markierten Kanten.*
LOOP:
`for` $\ell = 1, \ldots, L-1$ `do`

i. $\hat{\mathcal{M}}^{(\ell)} :=$*Closure von* $\mathcal{M}^{(\ell)}$ *der regulären Triangulierung* $\mathcal{T}^{(\ell)}$ *nach Algorithmus* 2.3.2

ii. Verallgemeinere die RGB Gitterverfeinerung mit Bisektion auf alle Kanten in $\hat{\mathcal{M}}^{(\ell)}$ *mit Ausgabe* $\mathcal{T}^{(\ell+1)}$ *und* $E^{(\ell+1)} : \mathcal{T}^{(\ell+1)} \to \mathcal{E}^{(\ell+1)}$

`end for`
OUTPUT: *Reguläre Triangulierungen* $\mathcal{T}^{(0)}, \mathcal{T}^{(1)}, \ldots, \mathcal{T}^{(L)}$.

2.7 Modellierung

Die untersuchten Beispiele sind Minimierungsprobleme der Gestalt

$$\min_{v \in V} E(v);\ E(v) = \int_\Omega \left(W(Dv) + \alpha |v - f_0|^2 - fv \right) dx.$$

Daraus werden in den Abschnitten 2.7.1 und 2.7.2 entsprechende schwache und gemischte Formulierungen für die Räume P_1 bzw. $\mathrm{P}_0 - \mathrm{RT}_0$ hergeleitet, die für die numerischen Berechnungen herangezogen werden.

2.7.1 Modellierung P_1

Für das Minimierungsproblem gilt

$$E(u) = \min_{v \in V} E(v) \ \Leftrightarrow\ DE(u) = 0.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & DE(u) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \int_\Omega \left(DW(Du; Dv) + 2\alpha(u - f_0)v - f\ v \right) dx = 0 \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

und daher

$$(DW(Du), Dv)_{L^2(\Omega)} + (2\alpha(u - f_0), v)_{L^2(\Omega)} - (f, v)_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall v \in V. \tag{2.3}$$

Die diskrete Formulierung ergibt sich analog mit $u_\ell, v_\ell \in V_\ell = V \cap \mathrm{P}_1(\mathcal{T}_\ell)$.

2.7.2 Modellierung $\mathrm{P}_0 - \mathrm{RT}_0$

Für das Minimierungsproblem gilt wieder

$$E(u) = \min_{v \in V} E(v) \;\Leftrightarrow\; DE(u) = 0.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & DE(u) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \int_\Omega \left(D^2 W(Du; Dv) + 2\alpha(u - f_0)v - f\ v \right) dx = 0 \quad \forall v \in V \\ \Leftrightarrow \quad & \int_\Omega (-\operatorname{div} \sigma + 2\alpha(u - f_0) - f, v)\, dx = 0 \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

und daher

$$\left\{ \begin{array}{rl} -\operatorname{div} \sigma + 2\alpha(u - f_0) & = f \\ \sigma & = DW(Du) \end{array} \right. \tag{2.4}$$

bzw.

$$\begin{aligned} (DW_\varepsilon^*(\sigma), \tau)_{L^2(\Omega)} + (u, \operatorname{div}\tau)_{L^2(\Omega)} &= 0 \quad \forall \tau \in Q, & (2.5) \\ (v, \operatorname{div}\sigma)_{L^2(\Omega)} - (2\alpha(u - f_0), v)_{L^2(\Omega)} + (f, v)_{L^2(\Omega)} &= 0 \quad \forall v \in V, & (2.6) \end{aligned}$$

mit regularisierter konjugierter Funktion W_ε^*, siehe Abschnitt 6.2.1.

Die diskrete Formulierung folgt analog mit $(u_\ell, \sigma_\ell), (v_\ell, \tau_\ell) \in V_\ell \times Q_\ell = (V \cap \mathrm{P}_0(\mathcal{T}_\ell)) \times (Q \cap \mathrm{RT}_0(\mathcal{T}_\ell))$.

2.8 Lösungsalgorithmen

Die Minimierungsprobleme werden durch das Lösen des Gleichungsystems

$$E(u) = \min_{v \in V} E(v) \quad \Leftrightarrow \quad DE(u) = 0 \tag{2.7}$$

bearbeitet. Dazu benutzt man die Matlab-Funktion `fsolve` oder das Newton-Raphson-Schema. Bei den numerischen Testbeispielen konnte kein nennenswerter Unterschied zwischen den beiden Verfahren festgestellt werden, so dass bei den Auswertungen immer `fsolve` benutzt wurde.

fsolve

Die Matlab-Funktion `fsolve` sucht für eine gegebene Funktion $R(x)$ die Nullstelle x mit Hilfe des Gauss-Newton-Verfahrens. R sei stetig differenzierbar. Das Gauss-Newton-Verfahren linearisiert zuerst die Funktion $R(x)$

$$\tilde{R}(x, x_k) = R(x_k) + DR(x_k)(x - x_k)$$

und minimiert die Norm der linearisierten Funktion

$$x_{k+1} = \arg\min_x \frac{1}{2}\|\tilde{R}(x, x_k)\|.$$

Dies führt zu der folgenden Bildungsvorschrift:

$$x_{k+1} = x_k - \left(DR(x_k)DR(x_k)^T\right)^{-1} DR(x_k)R(x_k).$$

Newton-Raphson-Schema

Das Newton-Raphson-Schema (oder einfach Newton-Verfahren) liefert die bekannte Bildungsvorschrift

$$x_{k+1} = x_k - \left(DR(x_k)\right)^{-1} R(x_k).$$

Jacobimatrix

Die diskrete Formulierung von (2.3) für den P_1-Ansatz kann wie folgt umgeschrieben werden.

$$R|_T := (DW(Du_\ell), Dv_\ell)_{L^2(\Omega)} + (2\alpha(u_\ell - f_0), v_\ell)_{L^2(\Omega)} - (f, v_\ell)_{L^2(\Omega)},$$

für alle $v_\ell \in V_\ell$.

Die Ableitung dieser Funktion lautet dann

$$DR|_T = \left(D^2W(Du_\ell; Dv_\ell), Dw_\ell\right)_{L^2(\Omega)} + (2\alpha\ w_\ell, v_\ell)_{L^2(\Omega)}.$$

Die diskrete Formulierung von (2.5) - (2.6) für den $\mathrm{P}_0 - \mathrm{RT}_0-$Ansatz kann umgeschrieben werden zu

$$R|_T := \begin{pmatrix} (u_\ell, \operatorname{div}\varphi_j)_{L^2(T)} + (DW^*_\varepsilon(\sigma_\ell), \varphi_j)_{L^2(T)} \\ (v_\ell, \operatorname{div}\sigma_\ell)_{L^2(T)} - (2\alpha(u\ell - f_0), v_h)_{L^2(T)} + (f, v_\ell)_{L^2(T)} \end{pmatrix},$$

für alle $\tau_\ell \in \mathrm{RT}_0(\mathcal{T})$ und $v_\ell \in \mathrm{P}_0(\mathcal{T})$.

Die Jacobimatrix lautet dann

$$DR|_T = \begin{pmatrix} (D^2W^*_\varepsilon(\sigma_\ell; \varphi_j), \varphi_k) & (v_\ell, \operatorname{div}\varphi_j)_{L^2(T)} \\ (v_\ell, \operatorname{div}\varphi_j)_{L^2(T)} & -(2\alpha, v_\ell)_{L^2(T)} \end{pmatrix}.$$

Kapitel 3

A Posteriori Fehlerschätzer

3.1 Zuverlässigkeit und Effizienz

Ein Fehlerschätzer η_ℓ ist effizient, wenn er den Spannungsfehler zusammen mit eventuell auftauchenden Termen höherer Ordnungen von unten abschätzt,

$$\eta_\ell \lesssim \|\sigma - \sigma_\ell\|_{L^{r/t}(\Omega)} + \text{T. h. O.} \tag{3.1}$$

Analog dazu ist ein Fehlerschätzer zuverlässig, falls

$$\|\sigma - \sigma_\ell\|_{L^{r/t}(\Omega)} \lesssim \eta_\ell + \text{T. h. O.} \tag{3.2}$$

Die Konstanten r und t müssen die Konvexitätsbedingungen (H1)-(H2) aus Abschnitt 1.1 erfüllen.

3.2 Motivation für neue Fehlerschätzer

Für den adaptiven Algorithmus AFEM benötigt man einen Fehlerschätzer, der auf die zu verfeinernden Elemente hinweist. Da die Lösung für konvexifizierte Energiedichten unter Umständen nicht eindeutig ist, wird der Fehler für die Spannungen $\|\sigma - \sigma_\ell\|_{L^{r/t}(\Omega)}$ abgeschätzt. Ein geeigneter Fehlerschätzer muss effizient und zuverlässig sein, das heißt er muss die Ungleichung

$$\eta_\ell \lesssim \|\sigma - \sigma_\ell\|_{L^{r/t}(\Omega)} \lesssim \eta_\ell \tag{3.3}$$

erfüllen.
Bei konvexifizierten Problemen stößt man hier auf Probleme, da sich bisher kein Fehlerschätzer finden ließ, der effizient und zuverlässig ist, siehe z.B. [21]. Hier sollen nun verschiedene Ansätze untersucht werden, um geeignete Fehlerschätzer zu finden.

3.3 Abschätzung des Spannungsfehlers

Satz 3.3.1. *Der Kantenfehlerschätzer zur Potenz $1/r$ ist global zuverlässig, d.h.*

$$\|\sigma - \sigma_\ell\|_{L^{r/t}(\Omega)} \lesssim \eta_\ell^{1/r}. \tag{3.4}$$

Dabei ist der Kantenfehlerschätzer durch

$$\eta_\ell \;:=\; \left(\sum_{E\in\mathcal{E}_\ell} \eta_E^r\right)^{1/r} \quad mit \;\; \eta_E := h_E^{1/r}|[\sigma_\ell\cdot\nu_E]|^{1/r} \tag{3.5}$$

für $E\in\mathcal{E}_\ell$ gegeben, wobei der Sprung $[\sigma_\ell\cdot\nu_E] = [\sigma_\ell\cdot\nu_E]_E$ auf inneren Kanten definiert ist durch

$$[\sigma_\ell\cdot\nu_E]_E(x) := \left(\lim_{T_+\ni x_+\to x}\sigma_\ell(x_+) - \lim_{T_-\ni x_-\to x}\sigma_\ell(x_-)\right)\cdot\nu_E \in \mathbb{R}^m \tag{3.6}$$

für alle $x\in E = \partial T_+\cap\partial T_-$, ν_E sei die äußere Einheitsnormale zu T_+.

Beweis.
Nach [4] gilt für $\sigma := DW(Du)$ mit Energiedichtefunktion W:

$$\begin{aligned} |DW(A)-DW(B)|^r &\lesssim W(B)-W(A)-DW(A)\cdot(B-A) \\ \Leftrightarrow |\sigma(x)-\sigma_\ell(x)|^r &\lesssim W(Du(x))-W(Du_\ell(x)) \\ &\quad -\sigma_\ell(x)\cdot D(u-u_\ell)(x). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Durch Integration über Ω und mit $\delta_\ell := E(u_\ell)-E(u)\geq 0$ (nach [18]) für das zu minimierende Energiefunktional $E(v) = \int_\Omega W(Dv)dx + \alpha\int_\Omega |v-f_0|^2dx - \int_\Omega fv\,dx$ erhält man

$$\begin{aligned} \|\sigma-\sigma_\ell\|^r_{L^r(\Omega)} + \delta_\ell &\lesssim \int_\Omega f(u-u_\ell)dx + \alpha\int_\Omega |u_\ell-f_0|^2-|u-f_0|^2dx \\ &\quad -\int_\Omega \sigma_\ell\cdot D(u-u_\ell)dx. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Nach [23] kann Gleichung (3.8) dann umgeformt werden zu

$$\|\sigma-\sigma_\ell\|^r_{L^{r/t}(\Omega)} \lesssim Res_\ell(u-u_\ell) \tag{3.9}$$

mit dem Residuum $Res_\ell(v) = \int_\Omega fvdx - \int_\Omega 2\alpha(u_\ell-f_0)vdx - \int_\Omega \sigma_\ell\cdot Dv\,dx$.
Die Norm $|||Res_\ell|||_*$ ist wie folgt definiert:

$$|||Res_\ell|||_* = \sup_{v\in V}\frac{|Res_\ell(v)|}{|||v|||}.$$

Damit folgt mit der Abschätzung $|||Res_\ell|||_{V^*} \lesssim \left(\sum_E \eta_E^2\right)^{1/2} =: \eta_\ell$

$$\|\sigma-\sigma_\ell\|^r_{L^r(\Omega)} \lesssim |||Res_\ell|||_*|||\operatorname{dist}(u,u_\ell)||| \tag{3.10}$$

$$\lesssim \eta_\ell \underbrace{\min_{v\in V_\ell}|||u-v|||}_{\lesssim 1} \tag{3.11}$$

$$\lesssim \eta_\ell := (\eta_\ell^{(1)})^r. \tag{3.12}$$

□

Bemerkung 3.3.2. *Der Fehlerschätzer $\eta_\ell^{1/2}$ ist zuverlässig, jedoch nicht effizient.*

Satz 3.3.3. *Der Kantenfehlerschätzer η_E ist lokal effizient.*

Beweis.
Mittels Argumentation nach [39], partieller Integration und der Funktion $\varphi_E \in H_0^1(\omega_E) := \varphi_a \cdot \varphi_b$ definiert als Produkt der nodalen Basisfunktionen, welche zu den Endknoten a, b der Kante E gehören, und mit $\omega_E = T_+ \cup T_-$ für $T_+ \cap T_- = E$ erhält man für den Kantenfehlerschätzer

$$\begin{aligned}
\eta_E^2 &:= h_E \|[\sigma_\ell \cdot \nu_E]\|^2_{L^2(E)} \\
&= h_E \int_E [\sigma_\ell \cdot \nu_E]^2 ds \\
&= h_E^2 [\sigma_\ell \cdot \nu_E]^2 \\
&= \left(\int_E \varphi_E [\sigma_\ell \cdot \nu_E] ds \right)^2 .
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\eta_E &= \underbrace{\operatorname{sign}([\sigma_\ell \cdot \nu_E])}_{=:\mu} \int_E \varphi_E [\sigma_\ell \cdot \nu_E] ds \\
&= \mu \int_E \varphi_E \Big([\sigma_\ell \cdot \nu_E] - \underbrace{[\sigma \cdot \nu_E]}_{=0} \Big) ds \\
&= \mu \int_{\omega_E} \Big(D\varphi_E(\sigma_\ell - \sigma) + \underbrace{\operatorname{div}_\ell(\sigma_\ell - \sigma)\varphi_E}_{f - f_{omega_E}} \Big) dx \\
&\lesssim \|\sigma - \sigma_\ell\|_{L^{r/t}(\omega_E)} + \operatorname{osc}_{r/t}(f, \omega_E),
\end{aligned}$$

wobei f_{omega_E} das Integralmittel von f bezeichnet. Der Sprung $[\sigma \cdot \nu_E] = [\sigma \cdot \nu_E]_E$ auf der Kante E ist definiert in Gleichung (3.6).
Damit ist η_E effizient. □

Die Zuverlässigkeit des Kantenfehlerschätzers zur Potenz 1 kann nur unter den Voraussetzungen $u \in H_3$ und $r = 2$ in (H1)–(H2) bewiesen werden (siehe Abschnitt 3.4.1).
Für konvexifizierte Probleme jedoch, wie sie hier untersucht werden, ist u im Allgemeinen nicht eindeutig. Ziel ist es nun, diese Effizienz-Zuverlässigkeits-Lücke zu schließen, indem man eine bessere Abschätzung findet.

3.4 Abschätzung des Residuums

Zuerst wird die Zuverlässigkeit des Kantenfehlerschätzers für hinreichend glatte u angegeben.

3.4.1 Ansatz mit Kantenfehlerschätzer

Nach [17] gilt für $u \in H^3(\omega)$ und $r = 2$:

$$|u|_{H^2(\omega)} \leq c_1\eta_\ell + c_2\|\sigma - \sigma_\ell\|^{1/2}_{L^2(\omega)} \tag{3.13}$$

für den Kantenfehlerschätzer $\eta_\ell := \|h_{\mathcal{E}}^{(1/2)}[\sigma_\ell \cdot \nu_E]\|_{L^2(\bigcup \mathcal{E}_\omega)}$. Die Konstante c_1 hängt nur von der Geometrie der Elemente ab, während c_2 nur vom Gebiet ω sowie von $\|u\|_{H^3(\omega)}$ abhängt. Nach [17] sind diese Konstanten beschränkt.
Gleichung (3.11) führt auf:

$$\begin{aligned}
\|\sigma - \sigma_\ell\|_2^2 &\lesssim \eta_\ell |||\operatorname{dist}(u, V_\ell)||| \\
&\lesssim \eta_\ell |hu|_{H^2(\omega)} \\
&\lesssim h\eta_\ell(c_1\eta_\ell + c_2\|\sigma - \sigma_\ell\|^{1/2}_{L^2(\omega)}).
\end{aligned}$$

Mit mehrfacher Anwendung der Youngschen Ungleichung $2ab \leq a^2 + b^2$ kann dies weiter abgeschätzt werden zu:

$$\begin{aligned}
\|\sigma - \sigma_\ell\|_2^2 &\lesssim h\eta_\ell^2 + h\|\sigma - \sigma_\ell\|_2 \\
&\lesssim h\eta_\ell^2 + h^2 + \|\sigma - \sigma_\ell\|_2^2 \\
\Rightarrow \|\sigma - \sigma_\ell\|_2^2 &\lesssim h\eta_\ell^2 + \text{T. h. O.}
\end{aligned}$$

3.4.2 Approximation der zweiten Ableitung

Man betrachte den folgenden Ansatz, um μ_ℓ geeignet zu wählen.
Nach [2] gilt

$$\begin{aligned}
\min_{v \in V_\ell} |||u - v||| &= |||u - Iu||| \\
&\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_E \|D^2 u\|_{L^{r/t}(\omega_E)},
\end{aligned}$$

allerdings ist D^2u nicht bestimmbar, falls u nicht eindeutig ist. Dieser Ansatz hat daher einen heuristischen Charakter. Statt der zweiten Ableitung der exakten Lösung betrachtet man daher die Approximation

$$\begin{aligned}
h_E\|D^2 u\|_{L^{r/t}(\omega_E)} &\approx h_E\|D^2 u_\ell\|_{L^{r/t}(\omega_E)} \\
&\lesssim \mu_E.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Man finde nun geeignete Fehlerschätzer $\mu_\ell := (\sum_E \mu_E^r)^{1/r}$ für $\|D^2 u_\ell\|_{L^{r/t}(\omega_E)}$, so dass

$$\eta_\ell\mu_\ell \lesssim \|\sigma - \sigma_\ell\|^r_{L^{r/t}(\Omega)} \lesssim \eta_\ell\mu_\ell \text{ bzw.} \tag{3.15}$$

$$\eta_E\mu_E \lesssim \|\sigma - \sigma_\ell\|^r_{L^{r/t}(\omega_E)} \lesssim \eta_E\mu_E \tag{3.16}$$

gilt. Es genügt dann, für die Zuverlässigkeit die Gleichung (3.14) zu zeigen, da dann die Zuverlässigkeit des Fehlerschätzers bereits durch (3.11) gegeben ist.

3.4.3 Modifizierter Kantenfehlerschätzer

Sei $p_\ell := Du_\ell \in H(\mathrm{div};\Omega)$ und $\mathrm{div}\, p_\ell$ konstant.

Satz 3.4.1. *Der Fehlerschätzer $\eta_\ell\mu_\ell$ mit Potenz $r/2$ ist für das Optimal Design Problem zuverlässig. Dabei ist $\mu_\ell := \left(\sum_{E\in\mathcal{E}_\ell}\mu_E^r\right)^{1/r}$ mit $\mu_E^r := h_E^{r/2}\,|[p_\ell\cdot\nu_E]|^{r/2}$ und η_ℓ bezeichnet den klassischen Kantenfehlerschätzer.*

Beweis.
In diesem Beweis werden die Konvexitätsbedingungen (H1) und (H2) benutzt, die in Abschnitt 1.1 definiert werden. Es gilt demnach für $\sigma := DW(p),\ p = Du$ und mit Kantenfehlerschätzer η_ℓ

$$\begin{aligned}
|\sigma-\sigma_\ell|^r &\lesssim W(Du)-W(Du_\ell)-\sigma_\ell\cdot D(u-u_\ell)\\
\|\sigma-\sigma_\ell\|^r_{L^{r/t}(\Omega)} &\lesssim \int_\Omega f(u-u_\ell)dx-\int_\Omega \sigma_\ell\cdot D(u-u_\ell)dx\\
&= \mathrm{Res}_\ell(u-u_\ell)\\
&\lesssim \eta_\ell \min_{v\in V_\ell}|||u-v|||\\
&\overset{(3.14)}{\approx} \eta_\ell\sum_{E\in\mathcal{E}_\ell} h_E\|\mathrm{div}\, p_\ell\|_{L^2(\omega_E)}.
\end{aligned}$$

Im Folgenden wird die letzte Norm weiter lokal abgeschätzt.

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{div}\, p_\ell\|^2_{L^2(\omega_E)} &= \int_{\omega_E}(\mathrm{div}\, p_\ell)^2dx\\
&\approx h_E^2(\mathrm{div}\, p_\ell)^2\\
\Rightarrow \|\mathrm{div}\, p_\ell\|_{L^2(\omega_E)} &\approx h_E\ \mathrm{div}\, p_\ell.
\end{aligned}$$

Mit konstanter Testfunktion φ_E gilt

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{div}\, p_\ell\|_{L^2(\omega_E)} &\approx h_E^{-1}\int_{\omega_E}\varphi_E\ \mathrm{div}\, p_\ell dx\\
&\le h_E^{-1}\int_E\varphi_E[p_\ell\cdot\nu_E]ds-h_E^{-1}\int_{\omega_E}D\varphi_E\cdot p_\ell dx\\
&= [p_\ell\cdot\nu_E]-h_E^{-1}\int_{\omega_E}D\varphi_E\cdot p_\ell dx.
\end{aligned}$$

Die Testfunktion φ_E war beliebig gewählt. Sei nun $\varphi_E\equiv 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{div}\, p_\ell\|_{L^2(\omega_E)} &\lesssim |[p_\ell\cdot\nu_E]|\\
\|\sigma-\sigma_\ell\|^r_{L^{r/t}(\Omega)} &\lesssim \sum_{E\in\mathcal{E}_\ell} h_E^{3/2}\|[\sigma_\ell\cdot\nu_E]\|_{L^2(E)}|[p_\ell\cdot\nu_E]|\\
&= \sum_{E\in\mathcal{E}_\ell}\eta_E\ h_E|[p_\ell\cdot\nu_E]|\\
&:= \sum_{E\in\mathcal{E}_\ell}(\eta_E^{(2)})^r=(\eta_\ell^{(2)})^r.
\end{aligned}$$

□

Satz 3.4.2. *Der Fehlerschätzer $\eta_E^{(2)}$ ist für $r = 2$ lokal effizient, es gilt*

$$\eta_E^{(2)} = (\eta_E\ \mu_E)^{1/2} \lesssim \|p - p_\ell\|_{L^2(\omega_E)} + \operatorname{osc}_2(f, \omega_E).$$

Der Fehler $\|p - p_\ell\|_{L^2(\omega_E)}$ hat die gleiche Ordnung wie der Spannungsfehler.

Beweis.
Es genügt zu zeigen, dass $\mu_E = h_E|[p_\ell \cdot \nu_E]| \lesssim \|p - p_\ell\|_{L^2(\omega_E)} + \operatorname{osc}_2(f, \omega_E)$, da dann mit Satz 3.3.3 gilt

$$\begin{aligned}(\eta_E^{(2)})^2 = \eta_E\mu_E &\lesssim \|\sigma - \sigma_\ell\|_{L^2(\omega_E)}\|p - p_\ell\|_{L^2(\omega_E)} + \operatorname{osc}_2(f, \omega_E)\\ &\approx \|\sigma - \sigma_\ell\|^2_{L^2(\omega_E)} + \operatorname{osc}_2(f, \omega_E).\end{aligned}$$

Der Fehler μ_E kann lokal mit der gleichen Argumentation wie in dem Beweis von Satz 3.3.3 wie folgt abgeschätzt werden,

$$\begin{aligned}\mu_E &= h_E|[p_\ell \cdot \nu_E]|\\ &\approx \underbrace{\operatorname{sign}([p_\ell \cdot \nu_E])}_{=:\mu} \int_E \varphi_E[p_\ell - p]\nu_E ds\\ &= \mu \int_{\omega_E} D\varphi_E(p_\ell - p)dx + \mu \int_{\omega_E} \varphi_E \operatorname{div}_\ell(p_\ell - p)dx\\ &\leq \underbrace{\|D\varphi_E\|_{L^2(\omega_E)}}_{\lesssim 1} \|p - p_\ell\|_{L^2(\omega_E)} + \|\operatorname{div}_\ell(p - p_\ell)\|_{L^1(\omega_E)}.\end{aligned}$$

Der zweite Term kann für eine beliebige Funktion $\hat{p}_\ell \in \mathrm{P}_2(\mathcal{T}_\ell|_{\omega_E})$ aufgesplittet werden in

$$\|\operatorname{div}_\ell(p - p_\ell)\|_{L^1(\omega_E)} \leq \|\operatorname{div}_\ell(p - \hat{p}_\ell)\|_{L^1(\omega_E)} + \|\operatorname{div}_\ell(\hat{p}_\ell - p_\ell)\|_{L^1(\omega_E)}.$$

Mit inverser Abschätzung auf $T_\pm$ mit $T_+ \cap T_- = E$ gilt

$$\begin{aligned}\|\operatorname{div}_\ell(\hat{p}_\ell - p_\ell)\|_{L^1(\omega_E)} &\leq h_E^{-1}\|\hat{p}_\ell - p_\ell\|_{L^1(\omega_E)}\\ &\leq h_E^{-1}\left(\|p - p_\ell\|_{L^1(\omega_E)} + \|\hat{p}_\ell - p\|_{L^1(\omega_E)}\right)\\ &\lesssim \|p - p_\ell\|_{L^2(\omega_E)} + h_E^{-1}\|\hat{p}_\ell - p\|_{L^1(\omega_E)}.\end{aligned}$$

Zusammen ergibt dies für den Fehlerschätzer μ_E

$$\begin{aligned}\mu_E &\lesssim \|p - p_\ell\|_{L^2(\omega_E)} + \|\operatorname{div}_\ell(p - p_\ell)\|_{L^1(\omega_E)}\\ &\lesssim \underbrace{\|p - p_\ell\|_{L^2(\omega_E)}}_{\geq \mathcal{O}(h)|p|_{H^1(\omega_E)}} + \underbrace{\min_{\hat{p}_\ell \in \mathrm{P}_2(\mathcal{T}_\ell|\omega_E)} \|\operatorname{div}_\ell(p - \hat{p}_\ell)\|_{L^1(\omega_E)} + h_E^{-1}\|\hat{p}_\ell - p\|_{L^1(\omega_E)}}_{\lesssim \mathcal{O}(h^2)|p|_{H^2(\omega_E)}}\\ &\lesssim \|p - p_\ell\|_{L^2(\omega_E)} + \text{T. h. O.}\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.4.3. *Gilt in* (H1)-(H2)*, dass $r = 2$ ist, dann ist der Fehlerschätzer $\eta_\ell^{(2)}$ effizient und zuverlässig bis auf Terme höherer Ordnung. Diese Bedingung ist für alle Testbeispiele gegeben.*

3.5 Glättungsfehlerschätzer

Ein weiterer Ansatz ist die Glättung der Spannung σ_ℓ auf dem Knotenpatch ω_E in der Art, dass τ_ℓ auf eine geglättete (*averaged*) Funktion $A\tau_\ell \in L_{r/t}(\Omega) \cap S^1(\mathcal{T}_\ell)$ abgebildet wird. Dies kann z.B. durch folgende Funktion realisiert werden:

$$\begin{aligned} A\tau_\ell &:= \sum_{z\in\mathcal{N}} \tau_z\varphi_z = \sum_{z\in\mathcal{N}} \varphi_z \fint_{\omega_z} \tau_\ell dx = \sum_{z\in\mathcal{N}} \varphi_z \tfrac{1}{|\omega_z|}\int_{\omega_z} \tau_\ell dx \quad \forall z \in \mathcal{N}\backslash\bar{\Gamma}_N, \\ A\tau_\ell(z)\cdot\eta_E &= g(z) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \forall z \in \mathcal{N}\cap\bar{\Gamma}_N. \end{aligned}$$

Satz 3.5.1. *Der Glättungsfehlerschätzer $\eta_\ell^{(3)}$ ist bis auf Terme höherer Ordnung zuverlässig und effizient, falls $\sigma \in H^2(\Omega)$ gilt.*

Beweis.
Die Zuverlässigkeit des Fehlerschätzers ist trivial,

$$\|\sigma - \sigma_\ell\|_{L^{r/t}(\Omega)} \lesssim \|\sigma_\ell - A\sigma_\ell\|_{L^{r/t}(\Omega)}.$$

Für die Effizienz des Fehlerschätzers wird der Fehlerschätzer in zwei Terme zerlegt.

$$\begin{aligned} \eta_\ell^{(3)} &= \|\sigma_\ell - A\sigma_\ell\|_{L^{r/t}(\Omega)} \le \|\sigma - \sigma_\ell\|_{L^{r/t}(\Omega)} + \|\sigma - A\sigma_\ell\|_{L^{r/t}(\Omega)} \\ &\approx \|\sigma - \sigma_\ell\|_{L^{r/t}(\Omega)} + \|\sigma - I\sigma\|_{L^{r/t}(\Omega)} \\ &\lesssim \|\sigma - \sigma_\ell\|_{L^{r/t}(\Omega)} + \underbrace{h_{\mathcal{T}}\|D^2\sigma\|_{L^{r/t}(\Omega)}}_{T.h.O.}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

□

Bemerkung 3.5.2. *Bei den behandelten numerischen Testbeispielen gilt $p = 2$, damit gilt die Zuverlässigkeit und Effizienz des Fehlerschätzers bis auf Terme höherer Ordnung.*

3.6 Allgemeiner zuverlässiger Fehlerschätzer

Hier wird nun ein allgemeiner Fehlerschätzer aus [23] angegeben.
Das allgemeine Minimierungsproblem lautet

$$E(v) = \int_\Omega W(Dv)dx + \alpha\int_\Omega |v - f_0|^2 dx - \int_\Omega fv\ dx. \tag{3.18}$$

Dies entspricht für $\alpha = 1$ und $f \equiv 0$ dem 2−Well Benchmark Problem, und für $\alpha = 0$ und $f \equiv const$ dem Optimal Design Problem und dem p−Laplace Problem.
Nach [23] gilt für obige Problemklasse folgender Satz.

Satz 3.6.1. *Wenn die Konvexitätsbedingungen* (H1)–(H2) *aus Abschnitt* 1.1 *für $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ erfüllt sind, dann gilt*

$$\|\sigma - \sigma_\ell\|_{L^{r/t}(\Omega)}^r + \alpha\|u - u_\ell\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_\ell} \eta_\ell^2(T)\right)^{1/q'} =: \left(\eta_\ell^{(4)}\right)^r \tag{3.19}$$

mit Fehlerschätzer

$$\eta_\ell^2(T) := h_T^{q'} \int_T |f + 2\alpha(f_0 - u_\ell) + \operatorname{div} \sigma_\ell|^{q'} dx + \frac{1}{2} \sum_{E \in \partial T \setminus \Gamma} h_E \int_E |[\sigma_\ell \cdot \nu_\ell]|^{q'} ds. \tag{3.20}$$

Nun kann diese Abschätzung auf die drei behandelten numerischen Testbeispiele angewendet werden.

Satz 3.6.2. *Sei nun $t = 1 + \frac{s}{q}$. Für das $p-$Laplace Problem gilt dann mit $r = 2,\ s = q-2$ und $2 \le q = p < \infty$, dass die Bedingungen* (H1)–(H2) *erfüllt sind, und daher*

$$\|\sigma - \sigma_\ell\|^2_{L^{q'}(\Omega)} \lesssim \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \eta_\ell^2(T) \right)^{1/q'} \tag{3.21}$$

$$\tag{3.22}$$

gilt mit

$$\eta_\ell^2(T) := h_T^{q'} \int_T |f + \operatorname{div} \sigma_\ell|^{q'} dx + \frac{1}{2} \sum_{E \in \partial T \setminus \Gamma} h_E \int_E |[\sigma_\ell \cdot \nu_\ell]|^{q'} ds. \tag{3.23}$$

Das Optimal Design Problem erfüllt (H1)–(H2) *mit $q = r = 2,\ s = 0,\ t = 1$, und daher gilt*

$$\|\sigma - \sigma_\ell\|^2_{L^2(\Omega)} \lesssim \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \eta_\ell^2(T) \right)^{1/2} \quad \textit{mit} \tag{3.24}$$

$$\eta_\ell^2(T) := h_T^2 \int_T |f + \operatorname{div} \sigma_\ell|^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{E \in \partial T \setminus \Gamma} h_E \int_E |[\sigma_\ell \cdot \nu_\ell]|^2 ds. \tag{3.25}$$

Für das $2-$Well Benchmark Problem erfüllen $q = 4,\ r = s = 2,\ t = 3/2$ die Bedingungen (H1)–(H2)*, und daher gilt*

$$\|\sigma - \sigma_\ell\|^2_{L^{4/3}(\Omega)} + \|u - u_\ell\|^2_{L^2(\Omega)} \lesssim \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \eta_\ell^2(T) \right)^{3/4} \tag{3.26}$$

mit

$$\eta_\ell(T)^2 := h_T^{4/3} \int_T |2(f - u_\ell) + \operatorname{div} \sigma_\ell|^{4/3} dx + \frac{1}{2} \sum_{E \in \partial T \setminus \Gamma} h_E \int_E |[\sigma_\ell \cdot \nu_\ell]|^{4/3} ds. \tag{3.27}$$

Beweis.
Die Abschätzungen (H1)–(H2) wurden in [18] bewiesen. □

3.7 Gemischter Primaler-Dualer Fehlerschätzer

Der Fehlerschätzer wird für die $P_0 - RT_0-$Modellierung des Optimal Design Problems hergeleitet. Bei diesem Ansatz der gemischten Formulierung wird das Problem für das Paar (σ, u) bzw. (σ_ℓ, u_ℓ) gelöst.

Es wird der folgende Dualitätsansatz benutzt:

$$ab = \varphi^*(a) + \varphi(b) \text{ für } a \in \partial\varphi(b) \Leftrightarrow b \in \partial\varphi^*(a). \tag{3.28}$$

Es gilt, dass $\sigma = DW(Du) \Leftrightarrow Du \in \partial W^*(\sigma)$. Gleichung (3.28) führt dann zu

$$\sigma \cdot Du = W^*(\sigma) + W(Du).$$

Daraus folgen die Umformungen für $DE(u) = 0$:

$$\begin{aligned} \int_\Omega f u dx &= \int_\Omega \sigma \cdot Du \; dx \\ &= \int_\Omega W^*(\sigma) + W(Du) dx, \\ \Rightarrow \int_\Omega W^*(\sigma) dx &= -E(u). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Es gilt, dass

$$\|\sigma - \sigma_\ell\|^r_{L^{r/t}(\Omega)} \lesssim \delta_\ell := E(u_\ell) - E(u) \geq 0 \text{ nach [18]}. \tag{3.30}$$

Korollar 3.7.1. *Für Lösungen (σ, u) des gemischten Optimal Design Problems gilt*

$$\int_\Omega W^*(\sigma) dx = \min_{\tau; \operatorname{div}\tau = -f} \int_\Omega W^*(\tau) dx. \tag{3.31}$$

Beweis.
Aus den vorigen Beweisen und Definitionen dieses Kapitels ist bereits bekannt, dass

$$\begin{aligned} &(W1) \quad E(v) = \int_\Omega W(Dv) - fv \; dx, && \text{siehe (2)}, \\ &(W2) \quad W^*(\tau) = \sup_q (q \cdot \tau - W(q)), && \text{Definition 6.2.1}, \\ &(W3) \quad -\int_\Omega W^*(\sigma) dx = E(u), && \text{siehe (3.29)}. \end{aligned}$$

Nun gilt mit $(W2)$, dass

$$\begin{aligned} W^*(\tau) &\geq Du \cdot \tau - W(Du) \\ \Leftrightarrow \quad W(Du) &\geq Du \cdot \tau - W^*(\tau). \end{aligned}$$

Dies zusammen mit $(W1)$ eingesetzt in $(W3)$ ergibt

$$\begin{aligned} -\int_\Omega W^*(\sigma) dx &\geq -\int_\Omega W^*(\tau) + \underbrace{\int_\Omega Du \cdot \tau - fu \; dx}_{=0 \text{ für } \operatorname{div}\tau = -f} \\ &= -\int_\Omega W^*(\tau) \qquad \text{für alle } \tau \text{ mit } \operatorname{div}\tau = -f \\ \Rightarrow \quad \int_\Omega W^*(\sigma) dx &= \min_{\tau; \operatorname{div}\tau = -f} \int_\Omega W^*(\tau) dx, \end{aligned}$$

da σ selbst die Bedingung $\operatorname{div}\sigma = -f$ erfüllt. $\square$

Damit gilt mit (3.29) und (3.30)

$$\|\sigma - \sigma_\ell\|^r_{L^{r/t}(\Omega)} \lesssim E(u_\ell) + \int_\Omega W^*(\tau)dx, \tag{3.32}$$

für alle τ mit $\operatorname{div}\tau = -f$, vor allem

$$\|\sigma - \sigma_\ell\|^r_{L^{r/t}(\Omega)} \lesssim E(u_\ell) + \int_\Omega W^*(\sigma_\ell)dx =: \left(\eta^{(5)}_\ell\right)^r. \tag{3.33}$$

Kapitel 4

Dualitätstheorie nach Repin

Die folgenden Ansätze stammen aus [36]. Die Beweisstrukturen wurden, falls vorhanden, übernommen und an mehreren Stellen gravierend geändert; in dem Paper nicht geführte Beweise wurden nachgeholt. Die Aussagen des Papers beziehen sich nur auf uniform konvexe Funktionale und werden in der vorliegenden Arbeit auf allgemeine Funktionale übertragen.

Zu dem primalen Minimierungsproblem wird ein duales Problem betrachtet, welches sich über die konjugierte (duale) Energie definiert. Daraus wird für ein beliebiges Fehlerfunktional $\Phi(De)$ ein Residualfehlerschätzer hergeleitet, der zuverlässig ist.

4.1 Notationen und Definitionen

Seien V, Y Banachräume mit Dualräumen V^*, Y^*. Die Energieminimierungen werden nun allgemein umschrieben mit

$$\min_{v \in V} E(v, \Lambda v)$$

mit Energie

$$E(v, \Lambda v) \quad = \quad A(\Lambda v) + F(v) = \int_\Omega a(v) + f(v) dx.$$

Die Abbildung $\Lambda : V \to Y$ ist dabei ein lineares Funktional, typischerweise $\Lambda v = Dv$. Die duale Abbildung ist entsprechend mit $\Lambda^* : Y^* \to V^*$ definiert.
Die Funktionale $F : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sowie $A : Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ seien aus der Menge $\mathbb{G}(X)$ mit $X = V$ bzw. $X = Y$. Alle Funktionale G aus dieser Menge seien proper, d.h. $\operatorname{dom} G = \{x \in X \mid G(x) < +\infty\}$, konvex und unterhalbstetig.
Die duale Energie $E^*\ast : V^* \times Y^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definiert sich über

$$E^*(\Lambda^* y^*, -y^*) = A^*(-y^*) + F^*(\Lambda^* y^*).$$

Die Minimierungsprobleme lauten nun

$$\begin{aligned} (P) \qquad E(u, \Lambda u) &= \min_{v \in V} E(v, \Lambda v), \\ (D) \quad -E^*(\Lambda^* p^*, -p^*) &= \max_{y^* \in Y^*} E(\Lambda^* y^*, -y^*). \end{aligned}$$

Bemerkung 4.1.1. *In den behandelten numerischen Beispielen gilt für $\Lambda v = Dv$*

$$A(Dv) = \int_\Omega W(Dv) + \alpha|v - f_0|^2 dx$$

und

$$F(v) = -\int_\Omega fv \; dx.$$

4.2 A Posteriori Fehlerschätzungen

Nun werden unter Benutzung der Dualitätsbeziehungen zwischen dem primalen und dualen Problem die entsprechenden Residuen der Probleme hergeleitet.

Lemma 4.2.1. *Es gelten die folgenden Dualitätsbedingungen:*

$$-p^* \in \partial A(\Lambda u) \tag{4.1}$$
$$\Lambda^* p^* \in \partial F(u). \tag{4.2}$$

Satz 4.2.2. *Die Residuen bezüglich Operator A bzw. F sind gegeben mit*

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_A(y^*, \Lambda v) &:= A(\Lambda v) + A^*(-y^*) + (y^*, \Lambda v)_{Y,Y^*} \\ \mathrm{Res}_F(\Lambda^* y^*, v) &:= F(v) + F^*(\Lambda^* y^*) - (\Lambda^* y^*, v)_{V,V^*}. \end{aligned}$$

Beweis.
Die Dualität ergibt

$$\begin{aligned} A^*(-p^*) &= \max_{z \in Y} \{(z, -p^*)_{Y \times Y^*} - A(z)\} \\ &= -\min_{z \in Y} \{A(z) + (z, p^*)_{Y \times Y^*}\}. \end{aligned}$$

Sei p die Lösung des Minimal-Problems, dann gilt

$$0 \in \partial A(p) + p^* \quad \Leftrightarrow \quad -p^* \in \partial A(p).$$

Die Dualitätsbedingung (4.1) ist mit $p = \Lambda u$ erfüllt. Dann folgt aus der Tatsache, dass p das Minimal-Problem löst, dass

$$A(\Lambda u) + A^*(-p^*) + (\Lambda u, p^*)_{Y \times Y^*} = 0.$$

Mit den diskreten Lösungen ergibt sich das Residuum

$$\mathrm{Res}_A(y^*, \Lambda v) = A(\Lambda v) + A^*(-y^*) + (\Lambda v, y^*)_{Y \times Y^*}.$$

Die Dualität auf die zweite Komponente angewendet ergibt

$$\begin{aligned} F^*(\Lambda^* p^*) &= \max_{z \in Y} \{(z, \Lambda^* p^*)_{Y \times Y^*} - F(z)\} \\ &= -\min_{z \in Y} \{F(z) - (z, \Lambda^* p^*)_{Y \times Y^*}\}. \end{aligned}$$

Für Lösung p des Minimal-Problems ergibt sich

$$0 \in \partial F(p) + \Lambda^* p^* \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda^* p^* \in \partial F(p).$$

Die zweite Dualitätsbedingung (4.2) ist mit $p = u$ erfüllt. Da p das Minimal-Problem löst, gilt

$$F^*(\lambda^* p^*) + F(u) - (u, \Lambda^* p^*)_{Y \times Y^*} = 0.$$

Mit den diskreten Lösungen ergibt sich hier das Residuum

$$\mathrm{Res}_F(\Lambda^* y^*, v) = F^*(\lambda^* y^*) + F(v) - (v, \Lambda^* y^*)_{Y \times Y^*} = 0.$$

□

Satz 4.2.3. *Existiert eine Funktion Φ mit $\Phi(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ und eine Funktion $\delta(y_1, y_2)$, so dass*

$$A\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) + \Phi(y_2 - y_1) + \delta(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(A(y_1) + A(y_2)), \tag{4.3}$$

und löst u das Problem (P) sowie p^* das duale Problem (D), dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(v, y^*) &:= \mathrm{Res}_A(y^*, \Lambda v) + \mathrm{Res}_F(\Lambda^* y^*, v) \quad \forall y^* \in Y^*,\ v \in V & (4.4)\\ &= \Phi(\Lambda e) + \delta(\Lambda u, \Lambda v) + \varepsilon & (4.5) \end{aligned}$$

mit $e = v - u$ und positiver Funktion ε.

Beweis.
Für die Fehlerfunktion $e = v - u$ gilt

$$\Phi(\Lambda e) + \delta(\Lambda u, \Lambda v) = \frac{1}{2}\left(A(\Lambda u) + A(\Lambda v)\right) - A\left(\frac{\Lambda u + \Lambda v}{2}\right).$$

Da F konvex ist, gilt

$$\frac{1}{2}\left(F(u) + F(v)\right) - F\left(\frac{u + v}{2}\right) = \varepsilon_F(u, v) \geq 0. \tag{4.6}$$

Daher gilt nun

$$\begin{aligned} \Phi(\Lambda e) + \delta(\Lambda u, \Lambda v) + \varepsilon_F(u, v) &= \frac{1}{2}\left(A(\Lambda u) + F(u) + A(\Lambda v) + F(v)\right)\\ &\quad -F\left(\frac{u + v}{2}\right) - A\left(\frac{\Lambda u + \Lambda v}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(E(u, \Lambda u) + E(v, \Lambda v)\right)\\ &\quad -F\left(\frac{u + v}{2}\right) - A\left(\frac{\Lambda u + \Lambda v}{2}\right). \end{aligned}$$

Da u das Minimum des Problems (P) darstellt, gilt für ein Fehlermaß ε_{Min}

$$\begin{aligned} E(u,\Lambda u) &= A\left(\frac{\Lambda u+\Lambda v}{2}\right)+F\left(\frac{u+v}{2}\right)-\varepsilon_{Min}(u,v) \\ &\leq A\left(\frac{\Lambda u+\Lambda v}{2}\right)+F\left(\frac{u+v}{2}\right). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Damit erhält man

$$\Phi(\Lambda e)+\delta(\Lambda u,\Lambda v)+\varepsilon_F(u,v)+\varepsilon_{Min}(u,v) = \frac{1}{2}\left(E(v,\Lambda v)-E(u,\Lambda u)\right).$$

Nun wird die Dualität betrachtet. Es gilt

$$F(u)+A(\Lambda u)=\min(P)=\max(P^*)=-F^*(\Lambda^* p^*)-A^*(-p^*),$$

sowie

$$\begin{aligned} -E^*(\Lambda^* p^*,-p^*) &= -E^*(\Lambda^* y^*,-y^*)+2\cdot\varepsilon_{E^*}(y^*,p^*) \quad \forall y^*\in Y^* \\ &\geq -E^*(\Lambda^* y^*,-y^*).s \end{aligned} \tag{4.8}$$

Zusammenfassend gilt

$$\begin{aligned} \Phi(\Lambda e) &+ \delta(\Lambda u,\Lambda v)+\varepsilon_F(u,v)+\varepsilon_{Min}(u,v) \\ &= \frac{1}{2}\left(F(v)+A(\Lambda v)-F(u)-A(\Lambda u)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(F(v)+A(\Lambda v)+F^*(\Lambda^* p^*)+A^*(-p^*)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(F(v)+A(\Lambda v)+F^*(\Lambda^* y^*)+A^*(-y^*)\right) \\ &\quad -\varepsilon_{E^*}(y^*,p^*), \qquad \forall y^*\in Y^*. \end{aligned}$$

Mit $(\Lambda^* y^*,v)_{V,V^*}=(y^*,\Lambda v)_{Y,Y^*}$ folgt

$$\begin{aligned} \Phi(\Lambda e) &+ \delta(\Lambda u,\Lambda v)+\varepsilon_F(u,v)+\varepsilon_{E^*}(y^*,p^*)+\varepsilon_{Min}(u,v) \\ &= \mathrm{Res}_A(y^*,\Lambda v)+\mathrm{Res}_F(\Lambda^* y^*,v), \end{aligned}$$

wobei die einzelnen Fehlermaße in (4.3) und (4.6) - (4.8) definiert sind. □

Definition 4.2.4. *Eine Funktion $G: Y\to\mathbb{R}$ heißt uniform konvex, falls in* (4.3) *gilt $\delta(y_2-y_1)\geq 0$ für alle $y_1,y_2\in Y$ sowie $\Phi(y)=0$ genau dann, wenn $y=0$.*

Bemerkung 4.2.5. *Ist A uniform konvex, dann gilt*

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(v,y^*) &:= \mathrm{Res}_A(y^*,\Lambda v)+\mathrm{Res}_F(\Lambda^* y^*,v) \quad \forall y^*\in Y^*,\ v\in V \\ &\geq \Phi(\Lambda e). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Satz 4.2.6. *Da F linear ist und A für alle numerischen Testbeispiele Gâteaux-differenzierbar ist, d.h. dass das Subdifferential ∂A nur ein eindeutiges Element besitzt, gilt*

$$\begin{aligned} \Phi(\Lambda e) &+ \delta(\Lambda u, \Lambda v) + \varepsilon \\ &\leq \mathrm{Res}_A(y^*, \Lambda v) + \frac{1}{2} \min_{q^* \in Q_f^*} \{y^* - q^*, DA^*(-q^*) - \Lambda v\}_{Y,Y^*} \end{aligned} \tag{4.10}$$

mit $e = v - u$ und ε aus Theorem 4.2.3. *Die Menge Q_f^* definiert sich durch*

$$Q_f^* := \{y^* \in Y^* \mid (\Lambda^* y^*, w)_{V,V^*} = f(w) \ \forall w \in V\}.$$

Beweis.
Der Beweis ergibt sich aus [36] unter Benutzung des vorigen Satzes 4.2.3. □

Sei $H \in \mathbb{G}(Y)$ positiv mit $H(0) = 0$. $H^* : Y^* \to \mathbb{R}_+$ sei das konjugierte (duale) Funktional. Dann gilt nach [36]

$$\Phi(\Lambda e) + \delta(\Lambda u, \Lambda v) + \varepsilon \leq \mathrm{Res}_D(y^*, \Lambda v) + \mathrm{Res}_R(y^*) \tag{4.11}$$

mit

$$\mathrm{Res}_D(y^*, \Lambda v) := \mathrm{Res}_A(y^*, \Lambda v) + \frac{1}{2} H(DA^*(-y^*) - \Lambda v), \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_R(y^*) := \frac{1}{2} \min_{q^* \in Q_f^*} \{&(y^* - q^*, DA^*(-q^*) - DA^*(-y^*))_{Y,Y^*} \\ &+ H^*(y^* - q^*)\}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Das einfachste Funktional H hat die Gestalt

$$H(y) = \frac{1}{2}\|y\|^2, \ H^*(y^*) = \frac{1}{2}\|y^*\|_*^2.$$

Annahme 4.2.7. *Seien $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ und $h^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ zueinander konjugiert. Sie erfüllen die Annahmen* (D1)–(D2)*, wenn*

(D1) $|t|^\alpha \lesssim h(t) \lesssim |t|^\beta$,
(D2) $(y^* - z^*, DA^*(y^*) - DA^*(z^*))_{Y,Y^*} \leq h^*(\|y^* - z^*\|_*), \quad \forall y^*, z^* \in Y^*,$

für $1 < \alpha \leq \beta$.

Satz 4.2.8. *Aus Satz* 4.2.3*, Satz* 4.2.6 *und Annahmen* (D1)–(D2) *folgt*

$$\Phi(\Lambda e) + \delta(\Lambda u, \Lambda v) + \varepsilon \leq \mathrm{Res}_D(y^*, \Lambda v) + \mathrm{Res}_R(y^*) \tag{4.14}$$

mit

$$\mathrm{Res}_D(y^*, \Lambda v) := \mathrm{Res}_A(y^*, \Lambda v) + \frac{1}{2} h(\|DA^*(-y^*) - \Lambda v\|), \tag{4.15}$$

$$\mathrm{Res}_R(y^*) := -\min_{w^* \in W} \{h(\|\Lambda w\|) + (y^*, \Lambda w)_{Y,Y^*} - f(w)\}. \tag{4.16}$$

Satz 4.2.9. *Seien $A(y)$ und $A^*(-y^*)$ stetig bei $y = \Lambda u$ und $y^* = p^*$. Seien $\{v_k\}$ bzw. $\{y_k^*\}$ Folgen, die in den entsprechenden Normen gegen u bzw. p^* konvergieren. Dann konvergiert die rechte Seite aus* (4.10) *gegen Null. Ist weiterhin DW^* stetig, so gilt*

$$\mathrm{Res}_D(y_k^*, \Lambda v_k) + \mathrm{Res}_R(y_k^*) \to 0 \text{ für } k \to 0.$$

Beweis.
Der Beweis kann in [36] gefunden werden. □

4.3 Anwendung auf das Optimal Design Problem

Zunächst werden die Residuen für das Optimal Design Problem berechnet. Für dieses Beispiel gilt $\alpha = 0$ und das Energiefunktional vereinfacht sich stark zu

$$E(v) = \int_\Omega W(Dv) - fv \; dx.$$

Nach Satz 4.2.6 ist der erste Teil des Residuums gegeben durch

$$\begin{aligned} Res_A(y^*, Dv) &= A(Dv) + A^*(-y^*) + y^* \cdot Dv \\ &= \int_\Omega W(Dv)dx + \int_\Omega W^*(-y^*)dx + y^* \cdot Dv. \end{aligned}$$

Der zweite Teil wird im Folgenden mit Res_F angegeben und lautet

$$\begin{aligned} Res_F(y^*, Dv) &= \frac{1}{2}(y^* - \tau) \cdot (DA^*(-\tau) - Dv) \\ &= \frac{1}{2}(y^* - \tau) \cdot (DW^*(-\tau) - Dv) \end{aligned}$$

für τ mit $\mathrm{div}\tau = f$.

Damit erhält man den Residualfehlerschätzer

$$\begin{aligned} \left(\eta_\ell^{(6)}\right)^2 &= Res_A(\sigma_\ell, Du_\ell) + Res_F(\sigma_\ell, Du_\ell) \\ &= \int_\Omega W(Du_\ell)dx + \int_\Omega W^*(-\sigma_\ell)dx + \sigma_\ell \cdot Du_\ell \\ &\quad + \frac{1}{2}(\sigma_\ell - \tau) \cdot (DW^*(-\tau) - Du_\ell) \end{aligned} \tag{4.17}$$

mit der Beschränkung $\mathrm{div}\tau = f$, was für $f \equiv 1$ z.B. durch $\tau = 0.5(x, y)^T$ gegeben ist.

Bemerkung 4.3.1. *In den numerischen Experimenten wurde festgestellt, dass dieser Fehlerschätzer zwar zuverlässig ist, jedoch kein effizientes Verhalten zeigt. Daher wird dieser Fehlerschätzer bei den Auswertungen nicht weiter betrachtet.*

Kapitel 5

Zielorientierte Ansätze

5.1 Motivation für die DWR Methode

Über die DWR (*Dual Weighted Residual*) Methode können Fehlerschätzer gefunden werden, die für alle linearen und nichtlinearen Problemtypen zuverlässiges Verhalten zeigen. Dazu wird ein *duales* Problem gelöst, welches bei der DWR Methode neben dem primalen Problem auch von einem Zielfunktional $J(e)$ abhängt, welches frei wählbar ist. In Abschnitt 5.5 werden verschiedene Varianten von Zielfunktionalen untersucht. Diese Zielfunktionale beeinflussen die Gittergenerierung des primalen Problems. Die Fehlerschätzer hängen jedoch von der exakten dualen Lösung z ab. Da diese jedoch nur als Gewicht multipliziert mit einem Residuum auftritt, genügt es nach [2], eine Glättung bzw. Interpolation zu benutzen. Man erhält Lösungen z_ℓ höherer Ordnung, die ausreichend nah an der exakten Lösung z liegen.

5.2 Allgemeine DWR Methode

Die DWR Methode benutzt residuale Terme multipliziert mit Gewichten als Fehlerschätzer. Diese erhält man durch das Lösen von globalen dualen Problemen. Die Einführung der DWR Methode ist aus [2] und [8] entnommen.

5.2.1 Primale Fehlerschätzer

Finde $x, x_\ell \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$Ax = b, \quad A_\ell x_\ell = b_\ell. \tag{5.1}$$

Der Approximationsfehler ist definiert durch $e := x - x_\ell$, der Trunkierungsfehler durch $\tau := A_\ell x - b_\ell = A_\ell e$ und das Residuum durch $\rho := b - Ax_\ell = Ae$.
Daraus folgt ein einfacher a priori Fehlerschätzer:

$$\|e\| \leq \|A_\ell^{-1}\| \, \|\tau\|, \tag{5.2}$$

sowie ein a posteriori Fehlerschätzer:

$$\|e\| \leq \|A^{-1}\| \, \|\rho\|. \tag{5.3}$$

5.2.2 Duales Problem

Sei $j \in \mathbb{R}^n$ gegeben und $z \in \mathbb{R}^n$ löse das *duale* oder *adjungierte* Problem

$$A^* z = j.$$

Dann gilt für das lineare Funktional J

$$J(e) = (e, j) = (e, A^* z) = (Ae, z) = (\rho, z),$$

wobei $(\cdot, \cdot)$ das Skalarprodukt bezeichnet, und es gilt die *gewichtete* a posteriori Fehlerschätzung

$$|J(e)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\rho_k||z_k|. \tag{5.4}$$

Die Gewichte z_k deuten an, wie stark der Einfluss eines lokalen Residuums ρ_k auf den Fehler der Zielgröße $J(e)$ ist.

5.2.3 Duale Fehlerschätzer

Es sei wieder $z \in V$ Lösung des dualen Problems

$$a(v, z) = J(v) \text{ für alle } v \in V, \tag{5.5}$$

und $z_\ell \in V_\ell := \{v \in V \mid v_{|T} \in P(T), T \in \mathcal{T}_\ell\}$ die Finite Elemente Approximation von

$$a(v_\ell, z_\ell) = J(v_\ell) \text{ für alle } v_\ell \in V_\ell. \tag{5.6}$$

Dann gilt mit Galerkin Orthogonalität und für den primalen Fehler $e := u - u_\ell$ sowie den dualen Fehler $e^* := z - z_\ell$

$$J(e) = a(e, z) = a(e, e^*) = a(u, e^*) = (f, e^*) =: F(e^*).$$

Daraus entstehen die primalen und dualen Residuen

$$\begin{aligned} J(e) &= (f, z - v_\ell) - a(u_\ell, z - v_\ell) =: \rho(u_\ell)(z - v_\ell) \quad \forall v_\ell \in V_\ell, \\ F(e^*) &= J(u - w_\ell) - a(u - w_\ell, z_\ell) =: \rho^*(z_\ell)(u - w_\ell) \quad \forall w_\ell \in V_\ell. \end{aligned}$$

Für das Residuum $\rho(u_z)(\cdot)$ gilt:

$$\begin{aligned} \rho(u_\ell)(z - v_\ell) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \left\{ (f + \triangle u_\ell, z - v_\ell)_{L^2(T)} + \frac{1}{2}([u_\ell \cdot \nu_\ell], z - v_\ell)_{L^2(\partial T \setminus \partial\Omega)} \right\}, \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \left\{ (r_T, z - v_\ell)_{L^2(T)} + \sum_{E \subset \partial T \setminus \partial\Omega} (r_E, z - v_\ell)_{L^2(E)} \right\}, \end{aligned}$$

wobei $(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uv \, dx$ das L_2-Skalarprodukt ist und mit $[\cdot]$ der Sprung auf den inneren Kanten bezeichnet wird.

Es ergibt sich die Fehlerdarstellung

$$J(e) = \frac{1}{2}\rho(u_\ell)(z - v_\ell) + \frac{1}{2}\rho^*(z_\ell)(u - w_\ell), \quad \forall v_\ell, w_\ell \in V_\ell. \tag{5.7}$$

Diese wird nun auf nichtlineare Probleme erweitert.

5.2.4 Nichtlineare Probleme

Wir betrachten nichtlineare Variationsprobleme der Art

$$A(u;v) = 0 \quad \forall v \in V \text{ und} \tag{5.8}$$
$$A(u_\ell;v_\ell) = 0 \quad \forall v_\ell \in V_\ell. \tag{5.9}$$

Um den Fehler im Zielfunktional $J(u) - J(u_\ell)$ abschätzen zu können, wird die Euler-Lagrange Methode benutzt. Das Lagrange-Funktional ist gegeben durch

$$\mathcal{L}(u,z) := J(u) - A(u;z).$$

Gesucht ist das Paar $\{u,z\} \in V \times V$ mit

$$\mathcal{L}'(u,z;v,w) = \left\{ \begin{array}{l} J'(u;v) - A'(u,z;v) \\ -A(u,w) \end{array} \right\} = 0 \quad \forall \{v,w\} \in V \times V,$$

sowie $\{u_\ell, z_\ell\} \in V_\ell \times V_\ell$ mit

$$\mathcal{L}'(u_\ell,z_\ell;v_\ell,w_\ell) = \left\{ \begin{array}{l} J'(u_\ell;v_\ell) - A'(u_\ell,z_\ell;v_\ell) \\ -A(u_\ell,w_\ell) \end{array} \right\} = 0 \quad \forall \{v_\ell,w_\ell\} \in V_\ell \times V_\ell.$$

Die daraus herleitbaren Residuen werden dann zur Abschätzung des Fehlers benutzt.

Die zweite Gleichung spiegelt das primale Problem wieder, u_ℓ muss das nichtlineare Variationsproblem (5.9) lösen. Die duale Lösung z_ℓ löst die erste Gleichung und hängt daher von der primalen Lösung ab. Das Lagrangefunktional koppelt damit das primale mit dem dualen Problem. Die beiden Probleme werden mit diesem Ansatz parallel gelöst.

Satz 5.2.1. *Sei $L(\cdot)$ eine dreimal differenzierbare Funktion definiert auf dem Vektorraum $\mathbf{X}$, die einen stationären Punkt $x \in \mathbf{X}$ besitzt, also*

$$L'(x;y) = 0 \quad \forall y \in \mathbf{X}.$$

Sei $x_\ell \in \mathbf{X}_\ell \subseteq \mathbf{X}$ die entsprechende stationäre Galerkin-Lösung. Dann gilt die Fehlerdarstellung

$$L(x) - L(x_\ell) = \frac{1}{2} L'(x_\ell; x - y_\ell) + \mathcal{R}_\ell, \quad \forall y_\ell \in \mathbf{X}_\ell$$

mit einem Restterm, der kubisch im Fehler $e_\ell = x - x_\ell$ ist,

$$\mathcal{R}_\ell := \frac{1}{2} \int_0^1 L'''(x_\ell + s e_\ell; e_\ell, e_\ell, e_\ell) s(s-1) ds.$$

Beweis.
Der Beweis kann in [2] gefunden werden. □

Satz 5.2.2. *Für beliebige nichtlineare Probleme* (5.8) *und* (5.9) *gilt die Fehlerdarstellung*

$$J(u) - J(u_\ell) = \frac{1}{2}\rho(u_\ell; z - v_\ell) + \frac{1}{2}\rho^*(u_\ell, z_\ell; u - w_\ell) + \mathcal{R}_\ell^{(3)}, \quad \forall v_\ell, w_\ell \in V_\ell, \tag{5.10}$$

mit primalen und dualen Residuen

$$\begin{aligned} \rho(u_\ell; \cdot) &:= -A(u_\ell, \cdot), \\ \rho^*(u_\ell, z_\ell; \cdot) &:= J'(u_\ell; \cdot) - A'(u_\ell, z_\ell; \cdot). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{R}_\ell^{(3)}$ einen Restterm, der kubisch in den primalen und dualen Fehlern $e := u - u_\ell$ und $e^* := z - z_\ell$ und damit vernachlässigbar ist.

Beweis.
Der Beweis gilt nach [2], falls die Voraussetzungen für Satz 5.2.1 erfüllt sind. □

5.3 Lösen des dualen Problems

Löst man das duale Problem, so erhält man Lösungen $J(u_\ell)$ bzw. $J(\sigma_\ell, u_\ell)$ abhängig von den Ansatzräumen. Da das erste Ziefunktional im zweiten, allgemeineren Fall enthalten ist, wird im Folgenden nur noch $J(\sigma_\ell, u_\ell)$ betrachtet. Es entsteht eine Folge $(J(\sigma_\ell, u_\ell))_{\ell=1}^{\infty}$ durch uniformes Lösen. Der Grenzwert dieser Folge wird mithilfe der Aitken-Extrapolation berechnet und als Approximation der exakten Lösung $J(\sigma, u)$ angesehen.

Definition 5.3.1 (Aitken-Extrapolation)**.** *Sei (x_n) eine gegebene Folge. Die Aitken-Extrapolation (y_n) definiert sich über*

$$y_k = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}.$$

Die Folge (y_n) konvergiert schneller gegen den Grenzwert x der Folge (x_n).

5.4 Anwendung auf konvexe Minimierungsprobleme

Die DWR Methode wurde für einfache nichtlineare Probleme der Art

$$A(u, v) = 0 \quad \forall v \in V$$

eingeführt.
Nun werden Probleme der Art

$$\min_{v \in V} E(v); \; E(v) = \int_\Omega W(Dv) + \alpha|v - f_0| - fv dx$$

betrachtet.

5.4.1 Fehlerschätzer

Zuerst werden zwei Fehlerschätzer aus [2] genannt, welche aus einem primalen Residuum und einem dualen Gewicht bestehen.

Der erste Fehlerschätzer, der *High Derivative* Fehlerschätzer, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} Res_\ell(u-u_\ell) &\lesssim \left(\|f\|^2_{L^2(T)} + \frac{1}{4}h_T^{-1}\|[\sigma_\ell\cdot\nu_E]\|^2_{L^2(\partial T)}\right)^{1/2} \\ &\quad\cdot\left(h_T^3\|[Dz_\ell\cdot\nu_E]\|^2_{L^2(\partial T)}\right)^{1/2} \\ &=: \eta^{(DWR,1)}. \end{aligned}$$

Der zweite Fehlerschätzer, der *Integration by Parts* Fehlerschätzer, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} Res_\ell(u-u_\ell) &\lesssim \sum_{T\in\mathcal{T}}\left(\left(\int_T f dx + \frac{1}{2}h_T^{-1/2}\sum_{E\in\partial T}\int_E [\sigma_\ell\cdot\nu_E]dx\right)\right. \\ &\quad\left.\cdot\left(\int_T (Iz_\ell - z_\ell)dx + h_T^{1/2}\sum_{E\in\partial T}\int_E (Iz_\ell - z_\ell)ds\right)\right) \\ &=: \eta^{(DWR,2)} \end{aligned}$$

mit Interpolationsoperator I.

Diese beiden Fehlerschätzer werden nun mit einem neuen Fehlerschätzer verglichen. Dieser benutzt die Existenz einer weiteren Lösung q_ℓ, welche das folgende Problem löst:

$$-\mathrm{div} q_\ell = f_\Omega := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f\ dx. \tag{5.11}$$

In den numerischen Beispielen wurde bis auf das erste Testbeispiel für das 2−Well Benchmark Problem $f \equiv 1$ angenommen. Eine sehr einfache Lösung des obigen Problems wäre damit

$$q_\ell = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Für das erste Beispiel des 2−Well Benchmark Problems gilt

$$f(x,y) := -\frac{3}{128}t^5 - \frac{1}{3}t^3 \quad \text{mit} \quad t := \frac{1}{\sqrt{13}}(3(x-1)+2y).$$

Hier ist q_ℓ gegeben durch

$$q_\ell = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/4 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{256}t^6 + \frac{1}{12}t^4\right).$$

Als eine andere Variante kann $q_\ell \in \mathrm{RT}_0$ als extra Problem betrachtet und zusätzlich zum eigentlichen Problem gelöst werden.

Das Residuum kann nun wie folgt mit dem *Medium* Fehlerschätzer abgeschätzt werden.

$$\begin{aligned} Res_\ell(u-u_\ell) &\lesssim \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T (q_\ell - \sigma_\ell)(A(Dz_\ell) - Dz_\ell)dx \\ &=: \eta^{(DWR,3)}. \end{aligned}$$

Alle drei Fehlerschätzer hängen von der dualen Lösung z ab. Bei Berechnung ohne duale Lösung können diese Fehlerschätzer so nicht verwendet werden. Jedoch motiviert die Struktur der Fehlerschätzer die Verwendung der gleichen Residuen und Gewichte im primalen Fall. Dies ergibt drei weitere Fehlerschätzer analog zu den DWR Fehlerschätzern mit $z = u$ und $z_\ell = u_\ell$. Diese Fehlerschätzer bestehen nun aus primalen Residuen und Gewichten, und werden daher PWR-Fehlerschätzer genannt.

Diese Fehlerschätzer hängen nun jedoch nicht mehr von einem Ziefunktional ab und sind daher nicht zur zielorientierten Gitterverfeinerung benutzbar. Trotzdem erhält man mit diesem Ansatz drei zuverlässige Fehlerschätzer, die das Verhalten der entsprechenden dualen Fehlerschätzer widerspiegeln.

Die primalen Fehlerschätzer lauten nun

$$\begin{aligned} \eta^{(PWR,1)} &:= \left(\|f\|^2_{L^2(T)} + \frac{1}{4} h_T^{-1} \|[\sigma_\ell \cdot \nu_E]\|^2_{L^2(\partial T)} \right)^{1/2} \\ &\quad \cdot \left(h_T^3 \|[Du_\ell \cdot \nu_E]\|^2_{L^2(\partial T)} \right)^{1/2}, \\ \eta^{(PWR,2)} &:= \sum_{T\in\mathcal{T}} \left(\left(\int_T f dx + \frac{1}{2} h_T^{-1/2} \sum_{E\in\partial T} \int_E [\sigma_\ell \cdot \nu_E] dx \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\int_T (Iu_\ell - u_\ell) dx + h_T^{1/2} \sum_{E\in\partial T} \int_E (Iu_\ell - u_\ell) ds \right) \right), \\ \eta^{(PWR,3)} &:= \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T (q_\ell - \sigma_\ell)(A(Du_\ell) - Du_\ell) dx. \end{aligned}$$

Im Folgenden wird ein weiterer Fehlerschätzer hergeleitet, der ebenfalls von dem gewählten Zielfunktional abhängt und aus einem primalen Residuum multipliziert mit einem primalen oder dualen Gewicht besteht. Dieser Fehlerschätzer hängt von der Art der Modellierung ab.
Für die P_1-Modellierung besteht der Fehlerschätzer aus zwei Residuen, bei der P_0-RT_0- Modellierung hängt der Fehlerschätzer von vier Residuen ab.

5.4.2 P_1-Modellierung

Aus (2.3) folgt die schwache Formulierung für $f, f_0 \in L^2(\Omega)$ und $u = u_D$ auf $\partial\Omega$:
Finde $u \in L^2(\Omega)$, so dass für alle $v \in L^2(\Omega)$ gilt

$$A(u,v) = (DW(Du), Dv)_{L^2(\Omega)} + (2\alpha(u - f_0), v)_{L^2(\Omega)} - (f, v)_{L^2(\Omega)} = 0. \tag{5.12}$$

Die diskrete schwache Formulierung lautet dann:
Finde $u_\ell \in P_1(\mathcal{T})$, so dass für alle $v_\ell \in P_1(\mathcal{T})$ gilt

$$A(u_\ell, v_\ell) = (DW(Du_\ell), Dv_\ell)_{L^2(\Omega)} + (2\alpha(u_\ell - f_0), v_\ell)_{L^2(\Omega)} - (f, v_\ell)_{L^2(\Omega)} = 0. \tag{5.13}$$

Gesucht ist ein $u \in L^2(\Omega)$, welches (5.12) erfüllt und das gegebene Zielfunktional $J(u)$ minimert,

$$J(u) = \min_{u \in L^2(\Omega)} J(v),$$

analog muss die diskrete Fomulierung gelten.

Dies kann mithilfe der Lagrangefunktion in eine Gleichung geschrieben werden, wobei die Wahl eines Lagrange-Multiplikators $z \in L^2(\Omega)$ die Einbettung der Nebenbedingungen (5.12) ermöglicht.

$$\mathcal{L}(u,z) = J(u) - A(u,z). \tag{5.14}$$

Da die Lösung der Lagrangefunktion (u,z) stationär sein soll, muss gelten

$$\begin{aligned} D\mathcal{L} &= \begin{pmatrix} D_u\mathcal{L}(u,z;w) \\ D_v\mathcal{L}(u,z;w) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_uJ(u,w) - D_uA(u,z;w) \\ -A(u,w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Die erste Gleichung entspricht dem dualen Problem, die zweite Gleichung dem primalen Problem. Das Paar (u,z) löst damit gleichzeitig beide Probleme. Dabei wurde benutzt, dass A linear im 2. Argument ist.

Analog lautet die diskrete Formulierung mit $(u_\ell, v_\ell) \in P_1(\mathcal{T}) \times P_1(\mathcal{T})$

$$\mathcal{L}(u_\ell, z_\ell) = J(u_\ell) - A(u_\ell, z_\ell), \tag{5.16}$$

$$D\mathcal{L} = \begin{pmatrix} D_u\mathcal{L}(u_\ell, z_\ell; w_\ell) \\ D_v\mathcal{L}(u_\ell, z_\ell; w_\ell) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.17}$$

Das Ziel ist es nun, den Fehler $J(\sigma,u) - J(\sigma_\ell, u_\ell)$ für ein beliebiges Zielfunktional durch die Residuen zu approximieren, die zu der Gleichung (5.17) gehören, definiert als

$$\rho^*(u_\ell, z_\ell; w_\ell) = D_uJ(u_\ell, w_\ell) - D_uA(u_\ell, z_\ell; w_\ell), \tag{5.18}$$

$$\rho(u_\ell; w_\ell) = -A(u_\ell; w_\ell). \tag{5.19}$$

Satz 5.4.1. *Der Fehler des Zielfunktionals kann wie folgt dargestellt werden:*

$$J(u) - J(u_\ell) = \frac{1}{2}\left[\rho^*(u_\ell, z_\ell; u - u_\ell) + \rho(u_\ell; z - z_\ell)\right] + \mathcal{R}_\ell$$

mit einem Restterm kubisch im Fehler $e_\ell = (u - u_\ell, z - z_\ell)$,

$$\mathcal{R}_\ell = \frac{1}{2}\int_0^1 D^3\mathcal{L}(su + (1-s)u_\ell, sz + (1-s)z_\ell; e_\ell, e_\ell, e_\ell)s(s-1)ds.$$

Beweis.
Aus Gleichungen (5.14) und (5.16) folgt mit (5.12) für Lösungen u bzw. u_ℓ

$$\begin{aligned} J(u) - J(u_\ell) &= \mathcal{L}(u, z) + A(u, z) - \mathcal{L}(u_\ell, z_\ell) - A(u_\ell, z_\ell) \\ &= \mathcal{L}(u, z) - \mathcal{L}(u_\ell, z_\ell). \end{aligned}$$

Mit Satz 5.2.1 folgt dann für $(\tilde{u}_\ell, \tilde{z}_\ell) \in \mathrm{P}_1(\mathcal{T}) \times \mathrm{P}_1(\mathcal{T})$

$$\begin{aligned} J(u) - J(u_\ell) &= \frac{1}{2}D\mathcal{L}(u_\ell, z_\ell; u - \tilde{u}_\ell, z - \tilde{z}_\ell)^T + \mathcal{R}_\ell \\ &= \frac{1}{2}\left[D_u\mathcal{L}(u_\ell, z_\ell; u - \tilde{u}_\ell) + D_z\mathcal{L}(u_\ell, z_\ell; z - \tilde{z}_\ell)\right] + \mathcal{R}_\ell \\ &= \frac{1}{2}\left[\rho^*(u_\ell, z_\ell; u - u_\ell) + \rho(u_\ell; z - z_\ell)\right] + \mathcal{R}_\ell. \end{aligned}$$

Der Restterm ergibt sich durch direktes Einsetzen in Satz 5.2.1. □

Bemerkung 5.4.2. *Da der Restterm* $\mathcal{R}_\ell$ *kubisch im Fehler* e_ℓ *ist, kann er gegenüber den anderen Termen vernachlässigt werden.*

Bemerkung 5.4.3. *Die Residuen* ρ^* *und* ρ *hängen von den schwachen Lösungen* (u, z) *ab. Nach* [2] *werden diese Lösungen durch Interpolationen oder Glättungen der diskreten Lösungen ersetzt.*

Bemerkung 5.4.4. *Für das Zielfunktional*

$$J(u) := \int_\Omega (DW(Du))^r \, dx = \|DW(Du)\|^r_{L^r(\Omega)} \tag{5.20}$$

haben die numerischen Auswertungen ergeben, dass der Residuenfehler eine gute Approximation des Spannungsfehlers ergibt,

$$\begin{aligned} \eta^{(\mathrm{DWR})} &:= \frac{1}{2}\left|\rho^*(u_\ell, z_\ell; Au_\ell - u_\ell) + \rho(u_\ell; Az_\ell - z_\ell)\right| \\ &\approx J(\sigma, u) - J(\sigma_\ell, u_\ell) \\ &\approx \|\sigma - \sigma_\ell\|^r_{L^r(\Omega)}, \end{aligned} \tag{5.21}$$

falls $r = 2$ *gilt. Für das* $2-$*Well Benchmark Problem ist diese Bedingung nicht erfüllt.*

5.4.3 $P_0 - RT_0-$Modellierung

Die schwache Formulierung lautet nach (2.5) - (2.6) für $f, f_0 \in L^2(\Omega)$ und $u = u_D$ auf $\partial\Omega$: Finde $(\sigma, u) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$, so dass für alle $(\tau, v) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$ gilt

$$\begin{cases} (\mathrm{div}\sigma - 2\alpha(u - f_0) + f, v)_{L^2(\Omega)} = 0 \\ (u, \mathrm{div}\tau)_{L^2(\Omega)} + (DW^*_\varepsilon(\sigma), \tau)_{L^2(\Omega)} - (u_D\nu, \tau)_{L^2(\partial\Omega)} = 0 \end{cases}.$$

Die diskrete schwache Formulierung lautet: Finde $(\sigma_\ell, u_\ell) \in RT_0(\mathcal{T}) \times P_0(\mathcal{T})$, so dass für alle $(\tau_\ell, v_\ell) \in RT_0(\mathcal{T}) \times P_0(\mathcal{T})$ gilt

$$\begin{cases} (\mathrm{div}\sigma_\ell - 2\alpha(u_\ell - f_0) + f, v_\ell)_{L^2(\Omega)} = 0 \\ (u_\ell, \mathrm{div}\tau_\ell)_{L^2(\Omega)} + (DW^*_\varepsilon(\sigma_\ell), \tau_\ell)_{L^2(\Omega)} - (u_D\nu, \tau_\ell)_{L^2(\partial\Omega)} = 0 \end{cases}.$$

Dies kann ebenso wie folgt formuliert werden:

$$\begin{aligned} A(\sigma;\tau) + B(u;\tau) &= G(\tau), \\ B(v;\sigma) &= F_0(u,v) + F(v), \end{aligned} \tag{5.22}$$

mit

$$\begin{aligned} A(\sigma;\tau) &= \int_\Omega D_\sigma W^*_\varepsilon(\sigma) \cdot \tau dx, \\ B(v,\sigma) &= \int_\Omega v \ \mathrm{div}\sigma dx, \\ G(\tau) &= \int_{\partial\Omega} u_D(\tau \cdot \nu) ds, \\ F_0(u,v) &= \int_\Omega 2\alpha(u - f_0)v \ dx, \ \text{und} \\ F(v) &= -\int_\Omega fv \ dx, \end{aligned}$$

wobei $W^*_\varepsilon(\sigma)$ die regularisierte konjugierte Funktion mir Regularisierungsparameter $\varepsilon > 0$ bezeichnet. Gesucht ist nun ein Paar $(\sigma, u) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$, welches (5.22) erfüllt und ein gegebenes Zielfunktional minimiert,

$$J(\sigma, u) = \min_{(\sigma,u) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)} J(\tau, v).$$

Dies kann nun mithilfe der Lagrangefunktion in eine Gleichung geschrieben werden, wobei die Wahl von Lagrange-Multiplikatoren $(\tau, v) \in H(\mathrm{div};\Omega) \times L^2(\Omega)$ die Einbettung der Nebenbedingungen (5.22) ermöglicht.

$$\mathcal{L}(\sigma, u; \tau, v) = J(\sigma, u) - A(\sigma;\tau) - B(u;\tau) + G(\tau) - B(v;\sigma) + F_0(u,v) + F(v). \tag{5.23}$$

Das Paar (τ, v) entspricht der dualen Lösung z bei der P_1-Modellierung, siehe Abschnitt 5.4.2.

Da die Lösung der Lagrangefunktion $(\sigma, u; \tau, v)$ stationär sein soll, muss gelten

$$\begin{aligned} D\mathcal{L} &= \begin{pmatrix} D_\sigma \mathcal{L}(\sigma, u; \tau, v, \varphi, w) \\ D_u \mathcal{L}(\sigma, u; \tau, v, \varphi, w) \\ D_\tau \mathcal{L}(\sigma, u; \tau, v, \varphi, w) \\ D_v \mathcal{L}(\sigma, u; \tau, v, \varphi, w) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_\sigma J(\sigma, u; \varphi) - D_\sigma A(\sigma; \tau, \varphi) - B(v; \varphi) \\ D_u J(\sigma, u; w) - B(w; \tau) \\ -A(\sigma; \varphi) - B(u; \varphi) + G(\varphi) \\ -B(w; \sigma) + F_0(u, w) + F(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Analog lautet die diskrete Formulierung mit $(\sigma_\ell, u_\ell, \tau_\ell, v_\ell) \in \mathrm{RT}_0(\mathcal{T}) \times \mathrm{P}_0(\mathcal{T}) \times \mathrm{RT}_0(\mathcal{T}) \times \mathrm{P}_0(\mathcal{T})$

$$\mathcal{L} = J(\sigma_\ell, u_\ell) - A(\sigma_\ell; \tau_\ell) - B(u_\ell; \tau_\ell) + G(\tau_\ell) - B(v_\ell; \sigma_\ell) + F(v_\ell), \tag{5.25}$$

$$D\mathcal{L} = \begin{pmatrix} D_\sigma \mathcal{L}(\sigma_\ell, u_\ell; \tau_\ell, v_\ell, \varphi_\ell, w_\ell) \\ D_u \mathcal{L}(\sigma_\ell, u_\ell; \tau_\ell, v_\ell, \varphi_\ell, w_\ell) \\ D_\tau \mathcal{L}(\sigma_\ell, u_\ell; \tau_\ell, v_\ell, \varphi_\ell, w_\ell) \\ D_v \mathcal{L}(\sigma_\ell, u_\ell; \tau_\ell, v_\ell, \varphi_\ell, w_\ell) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.26}$$

Dabei gilt, dass A linear im 2. Argument ist, und dass B, F, F_0 und G ebenfalls linear sind.
Das Ziel ist es nun, den Fehler $J(\sigma, u) - J(\sigma_\ell, u_\ell)$ für ein beliebiges Zielfunktional durch die Residuen zu approximieren, die zu der Gleichung (5.26) gehören, definiert als

$$\rho_1^*(\sigma_\ell, u_\ell, \tau_\ell, v_\ell; \varphi_\ell) = D_\sigma J(\sigma_\ell, u_\ell; \varphi_\ell) - D_\sigma A(\sigma_\ell; \tau_\ell, \varphi_\ell) - B(v_\ell, \varphi_\ell), \tag{5.27}$$

$$\rho_2^*(\sigma_\ell, u_\ell, \tau_\ell, v_\ell; w_\ell) = D_u J(\sigma_\ell, u_\ell; w_\ell) - B(w_\ell; \tau_\ell), \tag{5.28}$$

$$\rho_1(\sigma_\ell, u_\ell, \tau_\ell, v_\ell; \varphi_\ell) = -A(\sigma_\ell; \varphi_\ell) - B(u_\ell; \varphi_\ell) + G(\varphi_\ell), \tag{5.29}$$

$$\rho_2(\sigma_\ell, u_\ell, \tau_\ell, v_\ell; w_\ell) = -B(w_\ell, \sigma_\ell) + F_0(u_\ell, w_\ell) + F(w_\ell). \tag{5.30}$$

Satz 5.4.5. *Der Fehler des Zielfunktionals kann für den Regularisierungsparameter $\varepsilon > 0$ der Funktion W_ε^* wie folgt dargestellt werden:*

$$\begin{aligned} J(\sigma, u) - J(\sigma_\ell, u_\ell) &= \frac{1}{2} [\rho_1^*(\sigma_\ell, u_\ell; \sigma - \sigma_\ell) + \rho_2^*(\sigma_\ell, u_\ell; u - u_\ell) \\ &\quad + \rho_1(\sigma_\ell, u_\ell; \tau - \tau_\ell) + \rho_2(\sigma_\ell, u_\ell; v - v_\ell)] + \mathcal{R}_\ell \end{aligned} \tag{5.31}$$

mit einem Restterm kubisch im Fehler $e_\ell = (\sigma - \sigma_\ell, u - u_\ell, \tau - \tau_\ell, v - v_\ell)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\ell = \frac{1}{2} \int_0^1 D^3 \mathcal{L}(&s\sigma + (1-s)\sigma_\ell, su + (1-s)u_\ell, s\tau + (1-s)\tau_\ell, sv + (1-s)v_\ell; \\ &e_\ell, e_\ell, e_\ell) s(s-1) ds. \end{aligned}$$

Beweis.
Aus Gleichungen (5.23) und (5.25) folgt mit (5.22) für Lösungen (σ, u) bzw. (σ_ℓ, u_ℓ)

$$\begin{aligned} J(\sigma, u) - J(\sigma_\ell, u_\ell) &= \mathcal{L}(\sigma, u; \tau, v) + A(\sigma; \tau) + B(u; \tau) - G(\tau) + B(v; \sigma) \\ &\quad - F_0(u, v) - F(v) - \mathcal{L}(\sigma_\ell, u_\ell; \tau_\ell, v_\ell) - A(\sigma_\ell; \tau_\ell) - B(u_\ell; \tau_\ell) \\ &\quad + G(\tau_\ell) - B(v_\ell; \sigma_\ell) + F_0(u_\ell, v_\ell) + F(v_\ell) \\ &= \mathcal{L}(\sigma, u; \tau, v) - \mathcal{L}(\sigma_\ell, u_\ell; \tau_\ell, v_\ell). \end{aligned}$$

Mit Satz 5.2.1 folgt dann für beliebige $(\varphi_\ell, w_\ell, \psi_\ell, r_\ell) \in \mathrm{RT}_0(\mathcal{T}) \times \mathrm{P}_0(\mathcal{T}) \times \mathrm{RT}_0(\mathcal{T}) \times \mathrm{P}_0(\mathcal{T})$

$$\begin{aligned} J(\sigma,u) - J(\sigma_\ell,u_\ell) &= \frac{1}{2} D\mathcal{L}(\sigma_\ell,u_\ell;\tau_\ell,v_\ell,\sigma-\varphi_\ell,u-w_\ell,\tau-\psi_\ell,v-r_\ell)^T + \mathcal{R}_\ell \\ &= \frac{1}{2}\left[D_\sigma\mathcal{L}(\sigma_\ell,u_\ell;\tau_\ell,v_\ell,\sigma-\varphi_\ell) + D_u\mathcal{L}(\sigma_\ell,u_\ell;\tau_\ell,v_\ell,u-w_\ell)\right. \\ &\quad \left. + D_\tau\mathcal{L}(\sigma_\ell,u_\ell;\tau_\ell,v_\ell,\tau-\psi_\ell) + D_v\mathcal{L}(\sigma_\ell,u_\ell;\tau_\ell,v_\ell,v-r_\ell)\right] + \mathcal{R}_\ell \\ &= \frac{1}{2}\left[\rho_1^*(\sigma_\ell,u_\ell;\sigma-\varphi_\ell) + \rho_2^*(\sigma_\ell,u_\ell;u-w_\ell)\right. \\ &\quad \left. + \rho_1(\sigma_\ell,u_\ell;\tau-\psi_\ell) + \rho_2(\sigma_\ell,u_\ell;v-r_\ell)\right] + \mathcal{R}_\ell. \end{aligned}$$

Die Residuen ergeben sich durch die spezielle Wahl der Testfunktionen mit

$$\varphi_\ell := \sigma_\ell,\ w_\ell := u_\ell,\ \psi_\ell := \tau_\ell \text{ und } r_\ell := v_\ell.$$

Der Restterm ergibt sich durch direktes Einsetzen in Satz 5.2.1. □

Bemerkung 5.4.6. *Da der Restterm $\mathcal{R}_\ell$ kubisch im Fehler e_ℓ ist, kann er gegenüber den anderen Termen vernachlässigt werden.*

Bemerkung 5.4.7. *Die Residuen ρ_1^*, ρ_2^*, ρ_1 und ρ_2 hängen alle von den schwachen Lösungen (σ,u,τ,v) ab. Nach* [2] *werden diese Lösungen durch Glättungen oder Interpolationen der diskreten Lösungen ersetzt. Diese können als Approximation höherer Ordnung angesehen werden, da die diskreten Lösungen in $\mathrm{P}_0(\mathcal{T})$ bzw. $\mathrm{RT}_0(\mathcal{T})$ liegen.*

Bemerkung 5.4.8. *Der Regularisierungsparameter muss hierbei größer Null gewählt werden, da man sonst keine Regularisierung erhält, die Ableitung DW_0^* nicht stetig ist und der Satz* 5.2.1 *daher nicht angewendet werden kann.*

Bemerkung 5.4.9. *Analog zum vorigen Abschnitt der P_1-Modellierung wird ein Zielfunktional wie folgt definiert,*

$$J(\sigma) := \int_\Omega \sigma^2 \, dx = \|\sigma\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{5.32}$$

da die numerischen Auswertungen dafür ebenfalls ergeben haben, dass der Residuenfehler eine gute Approximation des Spannungsfehlers ergibt,

$$\begin{aligned} \eta^{(\mathrm{DWR})} &:= \frac{1}{2}\left|\rho_1^*(\sigma_\ell,u_\ell;I\sigma_\ell-\sigma_\ell) + \rho_2^*(\sigma_\ell,u_\ell;Au_\ell-u_\ell)\right. \\ &\quad \left. +\rho_1(\sigma_\ell,u_\ell;I\tau_\ell-\tau_\ell) + \rho_2(\sigma_\ell,u_\ell;Av_\ell-v_\ell)\right| \\ &\approx J(\sigma,u) - J(\sigma_\ell,u_\ell) \\ &\approx \|\sigma-\sigma_\ell\|^r_{L^r(\Omega)}, \end{aligned} \tag{5.33}$$

falls $r = 2$ gilt. Für das $2-$Well Benchmark Problem ist diese Bedingung nicht erfüllt.

5.5 Zielorientierte Netzverfeinerung

In diesem Abschnitt werden mögliche Zielfunktionale und die entsprechenden dualen Probleme besprochen. Die dualen Lösungen werden in die Fehlerschätzer für das primale Problem eingebaut, so dass die Netzverfeinerung indirekt von dem Zielfunktional gesteuert wird.
Die zu lösende Gleichung für die P_1-Modellierung lautet dann allgemein nach (5.15)

$$R(z_\ell) = D_u J(u_\ell; v_\ell) - \int_\Omega D_u^2 W(Du_\ell; Dz_\ell, Dv_\ell)\ dx - 2\alpha \int_\Omega z_\ell \cdot v_\ell\ dx = 0.$$

Für die Lösungsmethode `fsolve` muss nach Abschnitt 2.8 noch die Ableitung dieser Funktion berechnet werden. Diese ist

$$D_z R(z_\ell) = -\int_\Omega D_u^2 W(Du_\ell; Dv_\ell, Dw_\ell)\ dx - 2\alpha \int_\Omega v_\ell \cdot w_\ell\ dx.$$

Die Gleichungen für die $P_0 - RT_0-$Modellierung folgen analog.

5.5.1 Mittelwert der Lösung

Das Zielfunktional wird als Mittelwert der Lösung u über dem Teilgebiet $\Omega_1 \subseteq \Omega$ gewählt, also

$$J^{(1)}(\sigma, u) = J^{(1)}(u) = \frac{1}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_1} u\ dx = \int_\Omega \tilde{f} u\ dx, \tag{5.34}$$

mit entsprechender Funktion $\tilde{f} = |\Omega_1|^{-1}\chi_{\Omega_1}$.
In dem Optimal Design Problem wurde das Zielfunktional als Mittelwert der Lösung u über dem Gebiet $\Omega_1 := \{x \in \Omega \mid x \geq 0\}$ gewählt, siehe Abbildung 5.1. Die Gebiete des $p-$Laplace Problems entsprechen denen des Optimal Design Problems mit dem Unterschied, dass das Einheitsquadrat anstelle des Schlitzgebietes untersucht wird. Für das $2-$Well Benchmark Problem, welches auf dem Gebiet $\Omega = [0,1] \times [0,1.5]$ definiert ist, wird analog die rechte Hälfte als Zielgebiet Ω_1 gewählt.
Die Netze, die durch den ersten zielorientierten Ansatz entstanden sind, sind in den Abbildungen 7.9 und 7.11 gegeben.

5.5.2 Mittelwert des Gradienten

Nun wird das Zielfunktional als

$$J^{(2)}(\sigma, u) = J^{(2)}(u) = \frac{1}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_1} Du\ dx = \int_\Omega \tilde{f} Du\ dx, \tag{5.35}$$

gewählt mit Funktion $\tilde{f} = |\Omega_1|^{-1}\chi_{\Omega_1}$.
Das Zielfunktional wurde für das Optimal Design Problem in den numerischen Beispielen über dem Gebiet $\Omega_1 := \{x \in \Omega \mid x \leq -0.5\}$ berechnet, siehe Abbildung 5.2. Das Zielgebiet des $p-$Laplace Problems wurde wieder analog definiert. Das Zielgebiet für das $2-$Well Benchmark Problem wurde ebenso auf das linke Viertel des Gesamtgebietes beschränkt, also $\Omega_1 := \{x \in \Omega \mid x \leq 0.25\}$.
Die Netze für den zweiten zielorientierten Ansatz sind in den Abbildungen 7.13 und 7.15 gegeben.

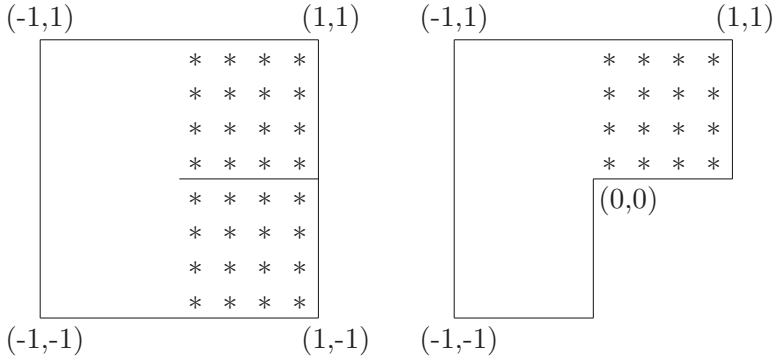


Abbildung 5.1: Visualisierung des Teilgebiets $\Omega_1 := \{x \in \Omega \mid x \geq 0\}$ des ersten Zielfunktionals auf dem Schlitzgebiet und dem L-förmigen Gebiet für das Optimal Design Problem. Die Gebiete für die anderen Testbeispiele wurden analog aufgeteilt.

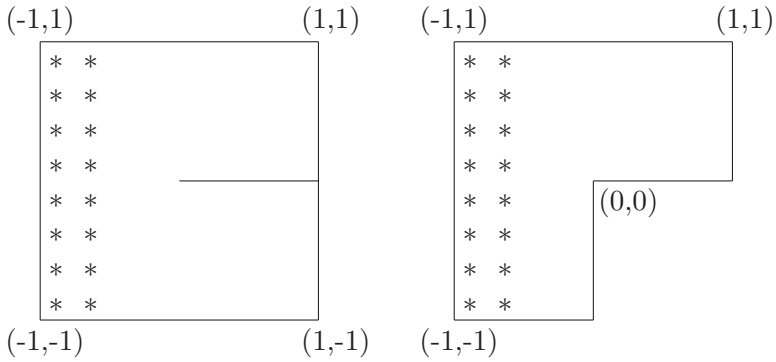


Abbildung 5.2: Visualisierung des Teilgebiets $\Omega_1 := \{x \in \Omega \mid x \leq -0.5\}$ des zweiten Zielfunktionals auf dem Schlitzgebiet und dem L-förmigen Gebiet für das Optimal Design Problem. Die Zielgebiete für die anderen Beispiele wurden analog aufgeteilt.

5.5.3 Spannungsfehler

Das dritte Zielfunktional,

$$J^{(3)}(\sigma, u) = \int_\Omega \sigma^2 \, dx \tag{5.36}$$

wurde bereits in den Gleichungen (5.20) und (5.32) benutzt.
Bei dem Aufstellen der zu lösenden dualen Gleichungen muss nach der Art der Modellierung unterschieden werden. Bei der P_1-Modellierung wird

$$J^{(3)}(u) = \int_\Omega (DW(Du))^2 \, dx$$

benutzt, bei der $P_0 - RT_0-$Modellierung mit $\tau = DW(Dv)$ wird

$$J^{(3)}(\sigma) = \int_\Omega \sigma^2 \, dx$$

benutzt.

Kapitel 6

Numerische Testbeispiele

In diesem Kapitel werden die drei numerischen Testbeispiele vorgestellt. Zuerst wird das Optimal Design Problem behandelt, welches wahrscheinlich das bekannteste Beispiel aus der Klasse der generierten konvexen Minimierungsprobleme darstellt. Für das Optimal Design Problem wird auch die gemischte Formulierung hergeleitet. Da für die konjugierte Energiedichte, welche im Gegensatz zu der eigentlichen Energiedichte streng konvex ist, bessere numerische Eigenschaften erwartet werden, wird die modifizierte gemischte Formulierung unter Verwendung der konjugierten Energiedichte benutzt.
Bei dem zweiten Beispiel, dem 2−Well Benchmark Problem, ist die Zuverlässigkeits-Effizienz-Lücke diffiziler und kann auch mit den in dieser Arbeit hergeleiteten Fehlerschätzern nicht geschlossen, sondern nur verkleinert werden.
Das dritte Beispiel, das $p-$Laplace Problem, ist dagegen mit einer einfachen Betragsfunktion als Energiedichte leichter zu handhaben. In der numerischen Auswertung wird das $p-$Laplace Problem für $p = 2$ betrachtet, was dem linearen Laplace Problem entspricht.

6.1 Konstruktion von Testbeispielen mit bekannter Lösung

Für die Evidenz des Fehlermaßes $\delta_\ell := E(u_\ell) - E(u)$ werden Testbeispiele konstruiert, deren Lösungen bekannt sind. Dazu muss nur die rechte Seite abhängig von u gewählt werden.
Die Lösung u minimiert das Energiefunktional

$$E(u) = \int_\Omega W(Du)dx + \alpha \int_\Omega |u - f_0|^2 dx - \int_\Omega f u dx,$$

u ist also die Nullstelle der Ableitung $DE(u)$.
Aus partieller Integration folgt

$$-\operatorname{div} DW(Du) + 2\alpha(u - f_0) \quad = f.$$

Bei der Konstruktion von numerischen Testbeispielen wählt man sich daher eine Lösung u mit gewünschten Eigenschaften, z.B. mit ausreichender Regularität. Die rechte Seite f berechnet sich dann aus obiger Gleichung, wobei f_0 vorgegeben ist.

Die konstruierten Testbeispiele sind künstliche Beispiele, da die rechte Seite bei den eigentlichen Minimierungsproblemen (abgesehen von dem ersten Beispiel des 2−Well Benchmark Problems, siehe Abschnitt 6.2.2) konstant 1 gesetzt wird. Trotzdem treten bei diesen Beispielen ähnliche Probleme wie bei den untersuchten Minimierungsproblemen auf. Es entsteht ebenfalls eine Kontaktzone zwischen den Materialien; die Fehlerschätzer verhalten sich ähnlich. Trotzdem werden die konstruierten Beispiele nicht in der numerischen Auswertung behandelt. Sie dienen lediglich zur Veranschaulichung des Fehlermaßes δ_ℓ, welches in Abschnitt 7.2 definiert wird.

6.2 Numerische Beispiele

6.2.1 Optimal Design Problem

Beim Optimal Design Problem wird das Gebiet in zwei Teilgebiete $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ zerlegt, wobei $|\Omega_1| = \xi|\Omega|$ gilt.
Das Optimal Design Problem ist ein Sattelpunktproblem gegeben durch

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \inf_{v\in V} E(\lambda, v) \text{ mit } E(\lambda, v) = \int_\Omega W_\lambda(Dv) - fv \, dx \tag{6.1}$$

mit $W_\lambda(x) = \psi_\lambda(|x|)$ definiert durch

$$\psi_\lambda(t) := \begin{cases} t^2 - \lambda\xi & , t \le \sqrt{\lambda}, \\ \sqrt{\lambda}(2t - \sqrt{\lambda}) - \lambda\xi & , \sqrt{\lambda} < t < 2\sqrt{\lambda}, \\ 0.5t^2 + \lambda - \lambda\xi & , 2\sqrt{\lambda} \le t. \end{cases} \tag{6.2}$$

Bei den Testrechnungen wurde $\xi = 0.5$ und $f \equiv 1$ gewählt. Die Bestimmung des optimalen Lagrange-Multiplikators λ wird in Abschnitt 6.3 beschrieben.

Die Herleitung des Optimal Design Problems kann z.B. [4] entnommen werden. Bei der numerischen Umsetzung wird der optimale Lagrange-Multiplikator mittels uniformer Verfeinerung und mithilfe der Aitken-Extrapolation ermittelt, siehe Definition 5.3.1. Danach wird der Lagrange-Multiplikator bei den adaptiven Berechnungen als Konstante angesehen. Daher steht λ nicht mehr im Index der Funktion W bzw. ψ.
Für die gemischte Formulierung der $\mathrm{P}_0 - \mathrm{RT}_0$−Räume in Abschnitt 2.7.2 wird die konjugierte Energiedichte benötigt.

Definition 6.2.1. *Die konjugierte Funktion einer Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{dom}(\varphi) \neq \emptyset$ ist definiert durch*

$$\varphi^*(z) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{z \cdot x - \varphi(x)\},$$

falls φ durch eine affine Funktion minorisierbar ist.

Satz 6.2.2. *Die konjugierte Funktion ψ^* ist gegeben durch*

$$\psi^*(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} + \lambda\xi & , t < 2\sqrt{\lambda}, \\ \lambda + \lambda\xi & , t = 2\sqrt{\lambda}, \\ \frac{t^2}{2} - \lambda + \lambda\xi & , 2\sqrt{\lambda} < t. \end{cases} \tag{6.3}$$

Beweis.
Nach Definition 6.2.1 gilt

$$\psi^*(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ t\cdot x - \begin{cases} x^2 - \lambda\xi & , \ x \le \sqrt{\lambda}, \\ \sqrt{\lambda}(2x-\sqrt{\lambda}) - \lambda\xi & , \ \sqrt{\lambda} < x < 2\sqrt{\lambda}, \\ 0.5x^2 + \lambda - \lambda\xi & , \ 2\sqrt{\lambda} \le x. \end{cases} \right\}.$$

Die Ableitung der rechten Seite wird nun Null gesetzt, um das $x \in \mathbb{R}$ zu ermitteln, welches das Supremum erfüllt.

$$0 = t - \begin{cases} 2x & , \ x \le \sqrt{\lambda}, \\ 2\sqrt{\lambda} & , \ \sqrt{\lambda} < x < 2\sqrt{\lambda}, \\ x & , \ 2\sqrt{\lambda} \le x. \end{cases}$$

Daraus ergeben sich Bedingungen an x für den ersten und letzten Fall, der zweite Fall reduziert sich auf den Punkt $t = 2\sqrt{\lambda}$. Dies eingesetzt in die Gleichung für ψ^* ergibt Gleichung 6.3. □

Die konjugierte Funktion ψ^* bzw. W^* hat jedoch eine schlechtere Regularität als die ursprüngliche Funktion, sie ist an der Stelle $t = 2\sqrt{\lambda}$ nicht ableitbar. Daher wird eine Regularisierung der Funktion vorgenommen.
In [29] wurde die folgende Regularisierung vorgeschlagen.

Definition 6.2.3 (Yosida-Moreau Regularisierung)**.** *Sei $\Psi : X \to (-\infty, \infty]$ eine konvexe Funktion, X ein konvexer reflexiver Banachraum. Die Yosida-Moreau Regularisierung ist definiert für $\varepsilon > 0$ als*

$$\Psi_\varepsilon(x) := \inf_{y\in X} \left\{ \Psi(y) + \frac{1}{2\varepsilon}\|x-y\|_X^2 \right\} \text{ für } x \in X. \tag{6.4}$$

Bemerkung 6.2.4. *Es gilt:*

$$\begin{aligned} \Psi_\varepsilon(x) &\le \Psi(x), \\ \lim_{\varepsilon\to 0} \Psi_\varepsilon(x) &= \Psi(x). \end{aligned}$$

Satz 6.2.5. *Die Regularisierte der konjugierten Funktion* (6.3) *ist dann gegeben durch*

$$\psi_\varepsilon^*(t) := \begin{cases} \frac{t^2}{2(\varepsilon+2)} + \lambda\xi & , t < \sqrt{\lambda}(\varepsilon+2), \\ \lambda + \frac{1}{2\varepsilon}(2\sqrt{\lambda} - t)^2 + \lambda\xi & , \sqrt{\lambda}(\varepsilon+2) \le t \le 2\sqrt{\lambda}(\varepsilon+1), \\ \frac{t^2}{2(\varepsilon+1)} - \lambda + \lambda\xi & , 2\sqrt{\lambda}(\varepsilon+1) < t. \end{cases} \tag{6.5}$$

Beweis.
Das Infimum aus Definition 6.2.3 wird durch die Ableitung der rechten Seite bestimmt und wird bei

$$\begin{cases} t = \frac{x}{1+\varepsilon/2} & , x < 2\sqrt{\lambda}(1+\varepsilon/2) \\ t = 2\sqrt{\lambda} & , \sqrt{\lambda}(\varepsilon+2) \le t \le 2\sqrt{\lambda}(\varepsilon+1) \\ \frac{x}{1+\varepsilon} & , 2\sqrt{\lambda}(1+\varepsilon) < x \end{cases}$$

angenommen. Dies eingesetzt in (6.4) ergibt (6.5). □

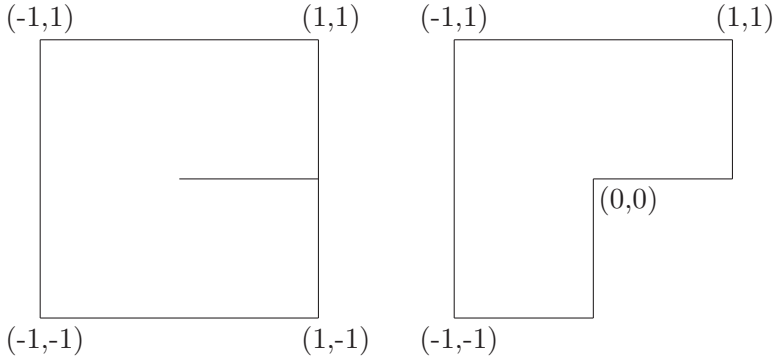


Abbildung 6.1: Das L-förmige Gebiet und Schlitzgebiet, welche für des Optimal Design Problem untersucht werden.

Lemma 6.2.6. *Der Fehler der Regularisierung kann abgeschätzt werden durch:*

$$|\psi_\varepsilon^*(t) - \psi^*(t)| = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Beweis.
Für den Beweis muss eine Fallunterscheidung vorgenommen werden.

1) $t \leq 2\sqrt{\lambda}$

$$|\psi_\varepsilon^*(t) - \psi^*(t)| = \left|\frac{t^2}{2(\varepsilon+2)} - \frac{t^2}{4}\right| = \varepsilon\frac{t^2}{4(\varepsilon+2)} \leq \frac{\varepsilon}{2}\lambda = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

2) $2\sqrt{\lambda} < t < 2\sqrt{\lambda} + \varepsilon\sqrt{\lambda}$

$$|\psi_\varepsilon^*(t) - \psi^*(t)| = \left|\frac{t^2}{2(\varepsilon+2)} - \frac{t^2}{2} + \lambda\right| = \left|\lambda - t^2\frac{\varepsilon+1}{2(\varepsilon+2)}\right|.$$

Da $(\varepsilon+1)/(\varepsilon+2) > 0$ und $t^2/2 > 2\lambda$ gilt dann

$$|\psi_\varepsilon^*(t) - \psi^*(t)| = \frac{(\varepsilon+2)(\varepsilon+1)}{2}\lambda - \lambda = \lambda\left(\frac{\varepsilon^2+3\varepsilon}{2}\right) = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

3) $2\sqrt{\lambda} + \varepsilon\sqrt{\lambda} \leq t \leq 2\sqrt{\lambda} + 2\varepsilon\sqrt{\lambda}$

$$\begin{aligned}
|\psi_\varepsilon^*(t) - \psi^*(t)| &= \left|\lambda + \frac{1}{2\varepsilon}(2\sqrt{\lambda} - t)^2 - \frac{t^2}{2} + \lambda\right| \\
&\leq \left|2\lambda - \frac{t^2}{2}\right| + \frac{1}{2\varepsilon}(2\varepsilon\sqrt{(}\lambda))^2 \\
&\leq \left|2\lambda - \frac{1}{2}(2\sqrt{\lambda} + 2\varepsilon\sqrt{\lambda})\right| + \frac{1}{2\varepsilon}(2\varepsilon\sqrt{(}\lambda))^2 \\
&= 2\varepsilon^2\lambda + 6\varepsilon\lambda = \mathcal{O}(\varepsilon).
\end{aligned}$$

4) $2\sqrt{\lambda} + 2\varepsilon\sqrt{\lambda} < t$

$$|\psi_\varepsilon^*(t) - \psi^*(t)| = \left| \frac{t^2}{2(\varepsilon+1)} - \frac{t^2}{2} \right| = \varepsilon \frac{t^2}{2(\varepsilon+1)} \leq \frac{\varepsilon}{2} t^2 = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

da t durch das endliche Gebiet Ω beschränkt ist. □

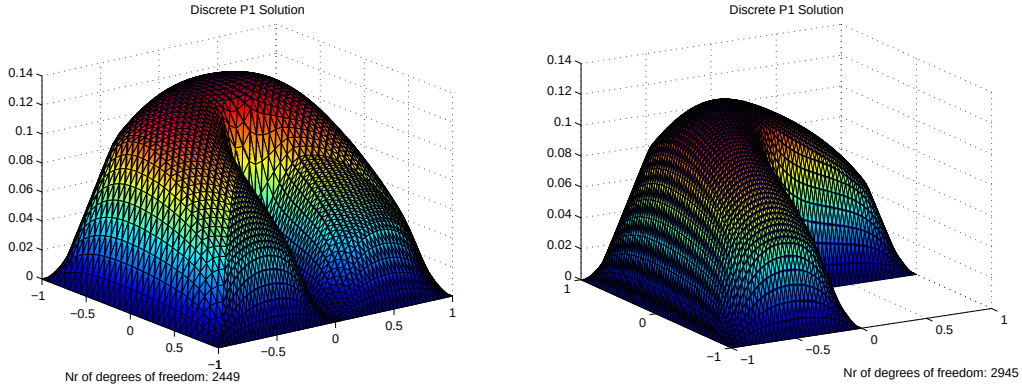


Abbildung 6.2: Diskrete Lösung des Optimal Design Problems für das Problem auf dem L-förmigen Gebiet und dem Schlitzgebiet mit konstanter rechter Seite $f \equiv 1$.

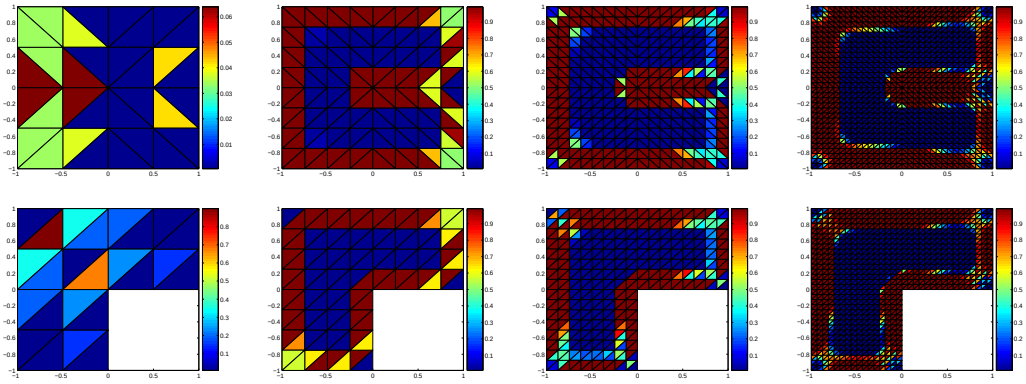


Abbildung 6.3: Diskrete Verteilung der Materialien auf dem L-förmigen Gebiet und dem Schlitzgebiet mit konstanter rechter Seite $f \equiv 1$ für die ersten fünf Verfeinerungslevel. Die roten Flächen geben das erste Material an, die blauen das zweite Material. Die Kontaktzone, in der die beiden Materialien gemischt werden, ist mit den restlichen Farben des Spektrums gekennzeichnet. Je feiner das Netz ist, auf dem die Lösung berechnet wird, desto kleiner ist das Maß der Kontaktzone.

6.2.2 2-Well Benchmark

Es werden zwei Testbeispiele betrachtet. Bei dem ersten Beispiel, das im Folgenden genauer angegeben wird, ist die exakte Lösung u unter Angabe der unten aufgeführten Randdaten und rechten Seite bekannt. Bei dem zweiten Testbeispiel wird die rechte Seite konstant gesetzt, $f \equiv 1$, der Dirichlet-Rand wird als homogen betrachtet, $u_{\partial\Omega} = u_D \equiv 0$.

Für $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ sei die nicht-konvexe Energiedichte $\tilde{W}(F)$ gegeben durch

$$\tilde{W}(F) = |F - F_1|^2 |F - F_2|^2, \quad F \in \mathbb{R}^2. \tag{6.6}$$

Das Energiefunktional ist demnach ebenfalls nicht-konvex,

$$\tilde{E}(v) = \int_\Omega \tilde{W}(Dv)dx + \int_\Omega |v - f_0|^2 dx, \tag{6.7}$$

für alle $v \in \mathcal{A} := u_0 + W_0^{1,4}(\Omega)$ mit $\Omega = (0,1) \times (0,3/2)$. Das Problem hat nach [21] in der Regel keine Lösung. Die diskrete Lösung $u_\ell := \arg\min\{\tilde{E}(v_\ell) \mid v_\ell \in \mathcal{A}_\ell\}$, $\mathcal{A}_\ell = u_{0,\ell} + \mathrm{P}_0^1(\mathcal{T})$ ist schwer zu finden.
Daher führt man eine Relaxation (Konvexifizierung) durch. Die so entstandenen Funktionen sowie das zugehörige Problem lauten

$$\begin{aligned}
u_\ell &:= \arg\min\{E(v_\ell) \mid v_\ell \in \mathcal{A}_\ell\}, && (6.8)\\
E(v) &:= \int_\Omega W(Dv)dx + \int_\Omega |v - f_0|^2 dx, && (6.9)\\
W(F) &:= \left((|F|^2 - 1)_+\right)^2 + 4\left(|F|^2 - (F_2 \cdot F)(F_2 \cdot F)\right), \quad F \in \mathbb{R}^2. && (6.10)
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Heavyside-Funktion $\mathbb{H} : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ mit

$$\mathbb{H}(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ für } x \le 0, \\ 1 & , \text{ für } x > 0, \end{cases} \tag{6.11}$$

lauten die entsprechenden Ableitungen

$$\begin{aligned}
DW(F;G) &= 4\left(|F|^2 - 1\right)_+ F \cdot G + 8(F \cdot G - (F_2 \cdot F)(F_2 \cdot G)),\\
D^2W(F;G,H) &= \left(4(|F|^2 - 1)_+ + 8\right)(H \cdot G) + 8\mathbb{H}(|F|^2 - 1)\ (F \cdot G)(F \cdot H)\\
&\quad -8(F_2 \cdot H)(F_2 \cdot G),\\
D^3W(F;G,H,J) &= 8\mathbb{H}(|F|^2 - 1)\\
&\quad \cdot \left[(F \cdot J)(G \cdot H) + (F \cdot H)(G \cdot J) + (F \cdot G)(H \cdot J)\right],
\end{aligned}$$

beziehungsweise für die Ausgangsfunktion $\tilde{W}(F)$:

$$\begin{aligned}
D\tilde{W}(F;G) &= 2(G, F - F_1)(F - F_2, F - F_2) + (F - F_1, F - F_1)(G, F - F_2),\\
D^2\tilde{W}(F;G,H) &= 2(G,H)(F - F_2, F - F_2) + 4(G, F - F_1)(H, F - F_2)\\
&\quad +4(H, F - F_1)(G, F - F_2) + 2(F - F_1, F - F_1)(G,H),\\
D^3\tilde{W}(F;G,H,J) &= 4(G,H)(2F - F_1 - F_2, J) + 4(G,J)(2F - F_1 - F_2, H)\\
&\quad +4(H,J)(2F - F_1 - F_2, G).
\end{aligned}$$

Die Ableitungen des Energiefunktionals lauten

$$\begin{aligned} DE(u;v) &:= \int_\Omega DW(Du;Dv)dx + \int_\Omega 2(u-f_0,v)_{R^n}dx, \\ D^2E(u;v,w) &:= \int_\Omega D^2W(Du;Dv,Dw)dx + \int_\Omega 2(v,w)_{R^n}dx. \end{aligned}$$

Es sei nun $F_1 := -(3,2)^T/\sqrt{13}$ und $F_2 = -F_1$ gegeben. Weiter gelte

$$\begin{aligned} t &:= \frac{1}{\sqrt{13}}(3(x-1)+2y), \\ f_0(t) &:= -\frac{3}{128}(t-\frac{1}{2})^5 - \frac{1}{3}(t-\frac{1}{2})^3, \\ f_1(t) &:= \frac{1}{24}(t-\frac{1}{2})^3 + (t-\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

u_D sei glatt mit

$$u_D := \begin{cases} \sqrt{13}(45657 - 92286y + 63144y^2 - 15472y^3 + 720y^4 - 96y^5)/843648 & ,x = 0 \\ 2y(4y^2/13+1)/\sqrt{13} & ,x = 1 \\ -9\sqrt{13}(x-1)^3(81x^2 - 162x + 1745)/281216 & ,y = 0 \\ 3x(9x^2/13+1)/\sqrt{13} & ,y = 3/2 \end{cases},$$

und $\mathcal{A} := u_D + W_0^{1,4}(\Omega)$. Die exakte Lösung ist dann gegeben durch

$$u(x,y) = \begin{cases} f_0(t+\frac{1}{2}) & ,t \le 0 \\ f_1(t+\frac{1}{2}) & ,0 < t \end{cases}. \tag{6.12}$$

Die Ableitungen sind entsprechend

$$Du(x,y) = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{cases} -\frac{15}{128}t^4 - t^2 & ,t \le 0 \\ \frac{1}{8}t^2 + 1 & ,0 < t \end{cases},$$

sowie

$$D^2u(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{9}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix} \begin{cases} (-\frac{15}{32}t^3 - 2t) & ,t \le 0 \\ \frac{1}{4}t & ,0 < t \end{cases}.$$

Für die $P_0 - RT_0$−Modellierung wird die konjugierte relaxierte Energiedichte benötigt, siehe Abschnitt 2.7.2. Diese Funktion ist jedoch analytisch nicht berechenbar und wird numerisch an jedem Punkt ausgewertet.

Nach Definition ist die konjugierte relaxierte Energiedichte gegeben durch

$$\begin{aligned} W^*(E) &= \sup_{G\in\mathbb{R}^2}\{G\cdot E - W(G)\} \\ &= \sup_{G\in\mathbb{R}^2}\{G\cdot E - \left((|G|^2-1)_+\right)^2 - 4\left(|G|^2 - (F_2\cdot G)^2\right)\}. \end{aligned}$$

Dies wird erfüllt, falls die Ableitung nach F Null ergibt, also

$$0 = E - 4(|G|^2-1)_+G - 8G + 8(F_2\cdot G)F_2.$$

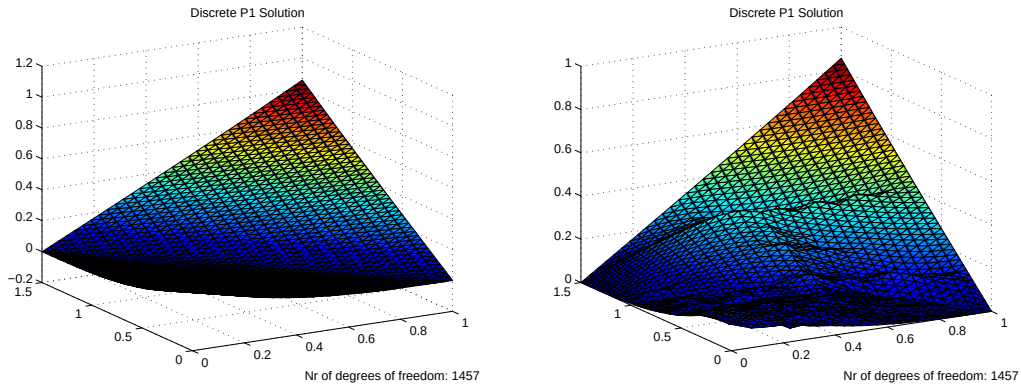


Abbildung 6.4: Diskrete Lösung des konvexen und nicht-konvexen $2-$*Well Benchmark Problems mit gegebenen Randdaten* u_D *und Funktion* f_0*.*

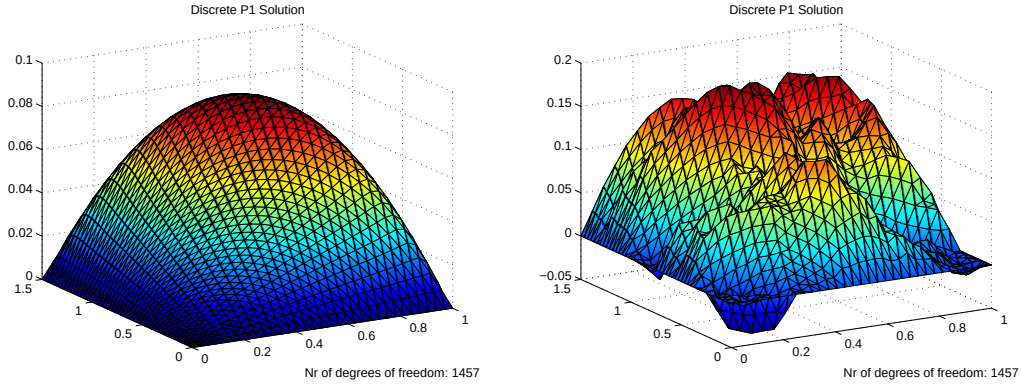


Abbildung 6.5: Diskrete Lösung des konvexen und nicht-konvexen $2-$*Well Benchmark Problems mit homogenen Randdaten* $u_D \equiv 0$ *und Funktion* $f_0 \equiv 1$*.*

Der Einfachheit halber wird ein Basiswechsel eingeführt, die Basis basiert dabei auf F_2 und dem dazu orthogonalen Vektor $F_1 := F_2^{\perp}$, genauer

$$\begin{aligned} F_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot F_2, \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit lässt sich jeder Vektor aus $\mathbb{R}^2$ eindeutig darstellen als Linearkombination der zwei neuen Basisvektoren. Der zu F_2 orthogonale Basisvektor wurde F_1 genannt, dieser sollte jedoch nicht mit der Konstanten F_1 verwechselt werden, während der zweite Basisvektor gerade so gewählt wurde, dass er der oben definierten Konstanten entspricht.

Es werden nun zwei verschiedene Fälle betrachtet.

1) Sei zuerst $|F| \leq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= E_1 \cdot F_1 + E_2 \cdot F_2 - 8G_1 \cdot F_1 - 8G_2 \cdot F_2 + 8G_1 \cdot F_1 \\ &= E_1 \cdot F_1 + E_2 \cdot F_2 - 8G_2 \cdot F_2. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $G_2 = E_2/8$ und $E_1 = 0$ gelten muss. Ein Supremum wird für diesen Fall also nur angenommen, falls $E_1 = 0$ ist. Das Supremum des ersten Falls muss dann jedoch noch mit dem Supremum des zweiten Falls verglichen werden. Für $E_1 \neq 0$ wird das Supremum nur für den zweiten Fall angenommen.

2) Sei nun $|F| > 1$. Dann gilt

$$0 = E_1 \cdot F_1 + E_2 \cdot F_2 - 4(G_1^2 + G_2^2 - 1)(G_1 \cdot F_1 + G_2 \cdot F_2) - 8G_2 \cdot F_2.$$

Daraus folgt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= G_1^3 + G_1(G_2^2 - 1) - \frac{1}{4}E_1, \\ 0 &= G_2^3 + G_2(G_1^2 + 1) - \frac{1}{4}E_2. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem wird mit den Cardanischen Formeln gelöst, wonach Gleichungen der Form

$$x^3 + px + q = 0$$

eine Lösung

$$x_1 = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{D}\right)^{1/3} \text{ für } D := \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

besitzen. Damit können also Gleichungen für G_1 und G_2 angegeben werden, welche jeweils von der anderen Lösung abhängen. Setzt man diese Gleichungen ineinander ein, so erhält man zwei voneinander entkoppelte Gleichungen. Da diese Gleichungen sehr lang und kompliziert sind, wird hier auf die Angabe derselben verzichtet.

Für diese Gleichungen gelten jedoch keine weiteren Bedingungen. G_1 und G_2 können direkt abhängig von E_1 und E_2 berechnet werden. Eine allgemeine Lösungsformel ist nicht möglich. Für die numerische Berechnung der Lösungen G_1 und G_2 wird die Matlab-Funktion *fsolve* benutzt.

Die konjugierte relaxierte Energiedichte ergibt sich nun mittels

$$W^*(E) = \begin{cases} g(G,E) & , E_1 \neq 0 \\ \max\{g(G,E), \frac{3}{16}E_2^2\} & , E_1 = 0 \end{cases} \tag{6.13}$$

mit

$$g(G,E) = G_1 \cdot E_1 + G_2 \cdot E_2 - \left((G_1^2 + G_2^2 - 1)_+\right)^2 - 4G_1^2.$$

Für die Implementierung werden weiterhin die erste und zweite Ableitung der konjugierten relaxierten Energiedichte W^* betrachtet. Diese können wiederum nur numerisch in den einzelnen Punkten berechnet werden; dazu wird der Differenzenquotient benutzt.

Da in jedem Punkt E die Funktionen $W^*(E)$, $DW^*(E;G)$ und $D^2W^*(E;G,H)$ neu berechnet werden müssen, wird die benötigte Zeit für die Berechnungen untragbar groß, so dass bei der Auswertung der $\mathrm{P}_0 - \mathrm{RT}_0-$Modellierung auf dieses Beispiel verzichtet wird. Für eine einfache Berechnung ohne Betrachtung des dualen Problems werden bereits für 100 Freiheitsgrade mehrere Stunden benötigt, die Zeit steigt jedoch exponentiell mit der Anzahl der Freiheitsgrade an. Aussagekräftige Ergebnisse werden jedoch erst ab 2000 Freiheitsgraden erwartet.

6.2.3 $p-$Laplace Problem

Als drittes Beispiel wird ein reguläres Problem betrachtet. Das wahrscheinlich einfachste Problem dieser Art stellt das $p-$Laplace Problem dar. Für $p = 2$ und $f \equiv 1$ erhält man das lineare Laplace Problem, welches in den Auswertungen benutzt wird. Es gilt

$$\begin{aligned} W(Du) &= |Du|^p, && (6.14)\\ DW(Du;Dv) &= p|Du|^{p-2}(Du,Dv)_{R^n}, && (6.15)\\ D^2W(Du;Dv,Dw) &= p(p-2)|Du|^{p-4}(Dv,Du)_{R^n}(Dw,Du)_{R^n} \\ &\quad +p|Du|^{p-2}(Dv,Dw)_{R^n}. && (6.16) \end{aligned}$$

Das Energiefunktional samt Ableitungen ist gegeben durch

$$\begin{aligned} E(u) &= \int_\Omega W(Du)dx - \int_\Omega fu\ dx, && (6.17)\\ DE(u;v) &= \int_\Omega DW(Du;Dv)dx - \int_\Omega fv\ dx, && (6.18)\\ D^2E(u;v,w) &= \int_\Omega D^2W(Du;Dv,Dw)dx. && (6.19) \end{aligned}$$

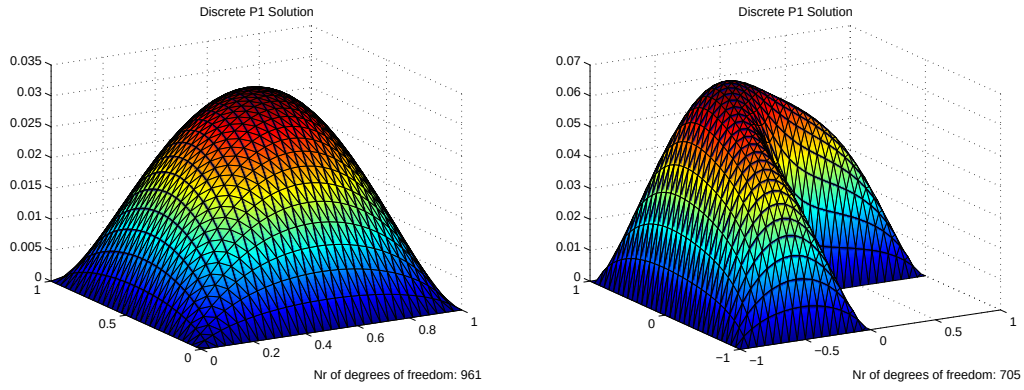


Abbildung 6.6: Diskrete Lösung des konvexen $p-$Laplace Problems für das Problem auf dem L-förmigen Gebiet und dem Schlitzgebiet mit konstanter rechter Seite $f \equiv 1$.

Für die $\mathrm{P}_0 - \mathrm{RT}_0-$Modellierung wird wieder die konjugierte Funktion benötigt. Diese lässt sich wie bei dem vorigen Beispiel nicht allgemein analytisch berechnen.

$$\begin{aligned} W^*(E) &= \sup_{G\in\mathbb{R}^2}\{G\cdot E - W(G)\} \\ &= \sup_{G\in\mathbb{R}^2}\{G\cdot E - |G|^p\}. \end{aligned}$$

Dies gilt genau dann, wenn

$$0 = E - p|G|^{p-2}\cdot G.$$

Für $p = 3$ z.B. ergibt dies

$$0 = E - 3\frac{G}{|G|},$$

was nur für Punkte E mit $|E| = 3$ eine Lösung ergibt. Für beliebige p kann also keine analytische Lösung angegeben werden, da sie unter Umständen nicht existiert. Für größere p entsteht wie im vorigen Beispiel ein Gleichungssystem, dass nur numerisch gelöst werden kann. Da hier wieder eine zu große Rechenzeit benötigt wird, wird dies nicht weiter beachtet. Für $p = 2$ existiert ein Lösung, da

$$0 = E - 2G$$

die Lösung $G = 0.5E$ besitzt, so dass

$$W^*(E) = -\frac{1}{2}E^2$$

gilt. Für diesen Fall kann die $\mathrm{P}_0 - \mathrm{RT}_0-$Modellierung mit modifizierter gemischter Formulierung umgesetzt werden. Bei der Auswertung des Optimal Design Problems ist jedoch bereits ersichtlich, dass für die Fehlerschätzer kein signifikanter Unterschied zwischen der P_1-Modellierung und der $\mathrm{P}_0 - \mathrm{RT}_0-$Modellierung zu erwarten ist. Daher wird bei der Auswertung auf den Vergleich der beiden Modellierungen für das Laplace Problem verzichtet.

6.3 Lagrange-Multiplikator für das Optimal Design Problem

Für die Minimierung des Energiefunktionals des Optimal Design Problems wurde λ immer konstant gewählt, da nur die Minimierung nach einer Variable untersucht wurde. In [4] wurde ein Algorithmus angegeben, mit dem das optimale λ berechnet werden kann.

Um möglichst genaue Daten zu erhalten, wird die Triangulierung $\mathcal{T}_0$ in der P_1-Modellierung viermal uniform *rot*-verfeinert. Für die gemischte Fomulierung werden zwei *rot*-Verfeinerungen benutzt.

Algorithmus 6.3.1. (Lagrange-Multiplikator).
INPUT: *Sei das Startintervall* $[a, b]$ *sowie eine Schrittweite* $P > 0.5$ *vorgegeben. Als Schrittweite kann z.B.* $P = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ *oder* $P = 0.9$ *gewählt werden. Weiterhin sei eine Toleranzschwelle* $TOL > 0$ *gegeben. Bei der Umsetzung des Algorithmus wurde* $TOL = 10^{-8}$ *gewählt.*
LOOP: $\varepsilon = 1$
`while` $\varepsilon \geq TOL$ `do`

- *Bestimme* $E_a := \min_{v \in V} E_{\lambda=a}(v)$.
- *Bestimme* $E_b := \min_{v \in V} E_{\lambda=b}(v)$.
- *Gilt* $E_a < E_b$, *setze* $a = (1-P)b - Pa$. *Gilt* $E_a > E_b$, *setze* $b = (1-P)a + Pb$.
- *Setze* $\varepsilon = |E_b - E_a|$.

`end while`
OUTPUT: $\lambda = \frac{a+b}{2}$.

Nach [29] ist das Startintervall $[0, 1]$ ausreichend für die Berechnung von λ. Der Algorithmus wird in Abbildung 6.7 für die ersten drei Schritte visualisiert.

Bei dem Optimal Design Problem werden 2 klassische Beispiele als Modellbeispiele ohne bekannte analytische Lösung herangezogen. Diese Beispiele sind auf dem Schlitzgebiet und dem L-förmigen Gebiet definiert. In [4] wurden zwei weitere Beispiele definiert, zum Einen auf dem Einheitsquadrat, zum Anderen auf dem Oktagon-Gebiet. Auf den Gebieten wird die rechte Seite jeweils konstant $f \equiv 1$ gesetzt.

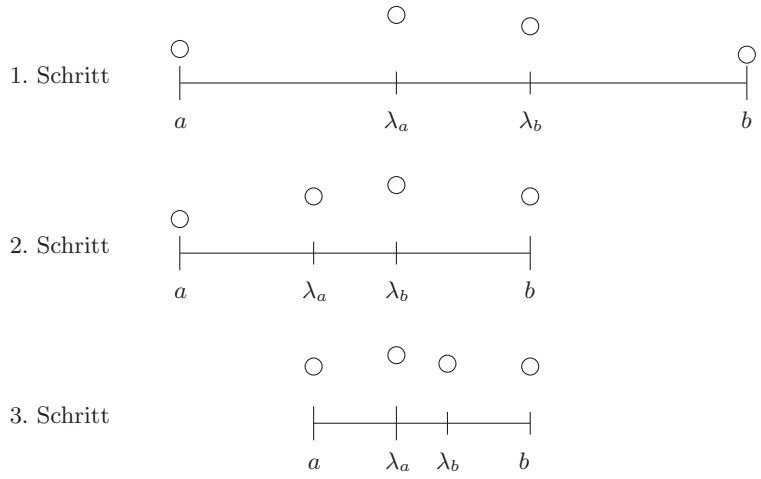


Abbildung 6.7: Visualisierung der ersten drei Iterationsschritte des Algorithmus zur Bestimmung des optimalen Wertes für λ. Zur Schrittweitensteuerung wurde der goldene Schnitt verwendet.

Problem	Lagrange-Multiplikator	[4]: Lagrange-Multiplikator
L-förmiges Gebiet	0.01450891266029	0.0144
Schlitzgebiet	0.01622726723795	0.0163
Einheitsquadrat	0.00844992886957	0.0084
Oktagon	0.02128622918119	0.0284

Tabelle 6.1: Lagrange-Multiplikatoren für das Optimal Design Problem für die verschiedenen untersuchten Gebiete.

Kapitel 7

Auswertung der Fehlerschätzer

In diesem Kapitel erfolgt nun die Auswertung der Fehlerschätzer bezüglich der numerischen Testbeispiele aus Kapitel 6. Zunächst werden für eine bessere Übersicht alle Fehlerschätzer aus den Kapiteln 3 bis 5 zusammengefasst aufgelistet. Die Fehlerschätzer für das Laplace Problem sind analog zu den Fehlerschätzern für das Optimal Design Problem definiert; die Fehlerschätzer werden daher zusammen angegeben. Die zusätzlichen Fehlerschätzer für das Optimal Design Problem werden getrennt angegeben. Der Spannungsfehler für das 2−Well Benchmark Problem wird in der $L^{4/3}-$Norm angegeben. Daher ändern sich einige der Fehlerschätzer entsprechend.

7.1 Fehlerschätzerübersicht

Die Fehlerschätzer für das Optimal Design und das Laplace Problem lauten

$$\begin{aligned}
(\eta_\ell^{(1)})^2 &:= \sum_{E\in\mathcal{E}_\ell} h_E \|[\sigma_\ell \cdot \nu_E]\|_{L^2(E)}, \\
(\eta_\ell^{(2)})^2 &:= \sum_{E\in\mathcal{E}_\ell} h_E^{3/2} \|[\sigma_\ell \cdot \nu_E]\|_{L^2(E)} |[p_\ell \cdot \nu_E]|, \\
(\eta_\ell^{(3)})^2 &:= \|\sigma_\ell - A\sigma_\ell\|^2_{L^2(\Omega)}, \\
(\eta_\ell^{(4)})^2 &:= h_T^2 \int_T |f + \operatorname{div}\sigma_\ell|^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{E\in\partial T\setminus\Gamma} h_E \int_E |[\sigma_\ell \cdot \nu_\ell]|^2 ds.
\end{aligned}$$

Für das Optimal Design Problem in der gemischten Formulierung gilt zusätzlich

$$(\eta_\ell^{(5)})^2 := E(u_\ell) + \int_\Omega W^*(\tau) dx.$$

Weiterhin gelten die PWR-Fehlerschätzer aus Kapitel 5 für das Optimal Design und das Laplace Problem,

$$\begin{aligned}
\eta^{(PWR,1)} &:= \left(\|f\|^2_{L^2(T)} + \frac{1}{4}h_T^{-1}\|[\sigma_\ell \cdot \nu_E]\|^2_{L^2(\partial T)}\right)^{1/2}, \\
&\quad \cdot \left(h_T^3\|[Du_\ell \cdot \nu_E]\|^2_{L^2(\partial T)}\right)^{1/2} \\
\eta^{(PWR,2)} &:= \sum_{T\in\mathcal{T}} \left(\left(\int_T f dx + \frac{1}{2}h_T^{-1/2} \sum_{E\in\partial T} \int_E [\sigma_\ell \cdot \nu_E] dx \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot \left(\int_T (u_\ell - u_\ell) dx + h_T^{1/2} \sum_{E\in\partial T} \int_E (u_\ell - u_\ell) ds \right) \right), \\
\eta^{(PWR,3)} &:= \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T (q_\ell - \sigma_\ell)(A(Du_\ell) - Du_\ell) dx.
\end{aligned}$$

Der Residualfehlerschätzer hängt von den Zielfunktionalen aus Abschnitt 5.5 ab und ist für die P_1-Modellierung gegeben durch

$$(\eta_\ell^{(PWR,Res)})^2 := \frac{1}{2}\left|\rho^*(u_\ell; Au_\ell - u_\ell) + \rho(u_\ell; Au_\ell - u_\ell)\right|.$$

Für die gemischte Formulierung lautet der Fehlerschätzer

$$\begin{aligned}
(\eta_\ell^{(PWR,Res)})^2 &:= \frac{1}{2}\left|\rho_1^*(\sigma_\ell, u_\ell; I\sigma_\ell - \sigma_\ell) + \rho_2^*(\sigma_\ell, u_\ell; Au_\ell - u_\ell)\right. \\
&\quad \left. + \rho_1(\sigma_\ell, u_\ell; I\sigma_\ell - \sigma_\ell) + \rho_2(\sigma_\ell, u_\ell; Au_\ell - u_\ell)\right|.
\end{aligned}$$

Für das Optimal Design Problem wurde abhängig von dem Zielfunktional das duale Problem gelöst. Die DWR Fehlerschätzer lauten entsprechend

$$\begin{aligned}
\eta^{(DWR,1)} &:= \left(\|f\|^2_{L^2(T)} + \frac{1}{4}h_T^{-1}\|[\sigma_\ell \cdot \nu_E]\|^2_{L^2(\partial T)}\right)^{1/2}, \\
&\quad \cdot \left(h_T^3\|[Dz_\ell \cdot \nu_E]\|^2_{L^2(\partial T)}\right)^{1/2} \\
\eta^{(DWR,2)} &:= \sum_{T\in\mathcal{T}} \left(\left(\int_T f dx + \frac{1}{2}h_T^{-1/2} \sum_{E\in\partial T} \int_E [\sigma_\ell \cdot \nu_E] dx \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot \left(\int_T (Iz_\ell - z_\ell) dx + h_T^{1/2} \sum_{E\in\partial T} \int_E (Iz_\ell - z_\ell) ds \right) \right), \\
\eta^{(DWR,3)} &:= \sum_{T\in\mathcal{T}} \int_T (q_\ell - \sigma_\ell)(A(Dz_\ell) - Dz_\ell) dx,
\end{aligned}$$

sowie

$$(\eta_\ell^{(DWR,Res)})^2 := \frac{1}{2}\left|\rho^*(u_\ell, z_\ell; Au_\ell - u_\ell) + \rho(u_\ell; Az_\ell - z_\ell)\right|$$

für die P_1-Modellierung und

$$\begin{aligned}(\eta_\ell^{(DWR,Res)})^2 &:= \frac{1}{2}\,|\rho_1^*(\sigma_\ell,u_\ell,\tau_\ell,v_\ell;I\sigma_\ell-\sigma_\ell)+\rho_2^*(\sigma_\ell,u_\ell,\tau_\ell,v_\ell;Au_\ell-u_\ell)\\ &\quad +\rho_1(\sigma_\ell,u_\ell,\tau_\ell,v_\ell;I\tau_\ell-\tau_\ell)+\rho_2(\sigma_\ell,u_\ell,\tau_\ell,v_\ell;Av_\ell-v_\ell)|\end{aligned}$$

für die gemischte Formulierung.

Für das 2−Well Benchmark Problem gelten die folgenden Fehlerschätzer:

$$\begin{aligned}(\eta_\ell^{(1)})^2 &:= \sum_{E\in\mathcal{E}_\ell} h_E\|[\sigma_\ell\cdot\nu_E]\|_{L^2(E)},\\ (\eta_\ell^{(2)})^2 &:= \sum_{E\in\mathcal{E}_\ell} h_E^{3/2}\|[\sigma_\ell\cdot\nu_E]\|_{L^2(E)}|[p_\ell\cdot\nu_E]|,\\ (\eta_\ell^{(3)})^2 &:= \|\sigma_\ell-A\sigma_\ell\|^2_{L^{4/3}(\Omega)},\\ (\eta_\ell^{(4)})^2 &:= h_T^{4/3}\int_T|2(f_0-u_\ell)+\operatorname{div}\sigma_\ell|^{4/3}dx+\frac{1}{2}\sum_{E\in\partial T\setminus\Gamma}h_E\int_E|[\sigma_\ell\cdot\nu_\ell]|^{4/3}ds.\end{aligned}$$

Die PWR-Fehlerschätzer aus Kapitel 5 lauten

$$\begin{aligned}\eta^{(PWR,1)} &:= \left(\|f\|^2_{L^2(T)}+\frac{1}{4}h_T^{-1}\|[\sigma_\ell\cdot\nu_E]\|^2_{L^2(\partial T)}\right)^{1/2}\\ &\quad\cdot\left(h_T^3\|[Du_\ell\cdot\nu_E]\|^2_{L^2(\partial T)}\right)^{1/2}\\ \eta^{(PWR,2)} &:= \sum_{T\in\mathcal{T}}\left(\left(\int_T f dx+\frac{1}{2}h_T^{-1/2}\sum_{E\in\partial T}\int_E[\sigma_\ell\cdot\nu_E]dx\right)\right.\\ &\quad\left.\cdot\left(\int_T(Iu_\ell-u_\ell)dx+h_T^{1/2}\sum_{E\in\partial T}\int_E(u_\ell-u_\ell)ds\right)\right)\\ \eta^{(PWR,3)} &:= \sum_{T\in\mathcal{T}}\int_T(q_\ell-\sigma_\ell)(A(Du_\ell)-Du_\ell)dx\\ (\eta_\ell^{(PWR,Res)})^2 &:= \frac{1}{2}\,|\rho_1^*(\sigma_\ell,u_\ell;I\sigma_\ell-\sigma_\ell)+\rho_2^*(\sigma_\ell,u_\ell;Au_\ell-u_\ell)\\ &\quad +\rho_1(\sigma_\ell,u_\ell;I\sigma_\ell-\sigma_\ell)+\rho_2(\sigma_\ell,u_\ell;Au_\ell-u_\ell)|\,.\end{aligned}$$

7.2 Fehlermaß

Als Fehlermaß für Beispiele, bei denen die exakte Lösung unbekannt und der Spannungsfehler $\|\sigma-\sigma_\ell\|_{L^{r/t}(\Omega)}$ daher nicht bekannt ist, wird, wie in [18] vorgeschlagen, das Fehlermaß

$$\delta_\ell := E(u_\ell) - E(u) \geq 0$$

für den Spannungsfehler herangezogen, da das folgende Lemma gilt.

Lemma 7.2.1. *Es gilt*

$$\|\sigma_{\ell+1} - \sigma_\ell\|^r_{L^{r/t}(\Omega)} \lesssim \delta_\ell - \delta_{\ell+1}. \tag{7.1}$$

Die Folge der Spannungen konvergiert gegen die exakte Spannung σ, während die Folge δ_ℓ gegen $\delta = 0$ konvergiert. Damit gilt mit Gleichung (7.1)

$$\begin{aligned}
\|\sigma - \sigma_\ell\|^r_{L^{r/t}(\Omega)} &= \|\sigma - \ldots + \sigma_{\ell+1} - \sigma_\ell\|^r_{L^{r/t}(\Omega)} \\
&\leq \|\sigma_{\ell+1} - \sigma_\ell\|^r_{L^{r/t}(\Omega)} + \|\sigma_{\ell+2} - \sigma_{\ell+1}\|^r_{L^{r/t}(\Omega)} + \ldots \\
&\lesssim \delta_\ell - \delta_{\ell+1} + \delta_{\ell+1} - \delta_{\ell+2} + \ldots \\
&= \delta_\ell.
\end{aligned}$$

Da die exakte Energie $E(u)$ unbekannt ist, wird zuerst uniform mit vielen Freiheitsgraden eine Folge $(E(u_\ell))_{\ell=1}^\infty$ berechnet, die danach mittels Aitken-Extrapolation einen Grenzwert $\tilde{E}(u_\ell) \approx E(u)$ erreicht, dieser wird als Referenzlösung für das Fehlermaß benutzt,

$$\delta_\ell := E(u_\ell) - \tilde{E}(u_\ell).$$

Die extrapolierten Energien für die einzelnen numerischen Beispiele sind in der folgenden Tabelle gegeben.

Beispiel	Energie
Optimal Design P_1, L-förmig (exakt)	1.80118931500645
Optimal Design P_1, L-förmig ($f \equiv 1$)	-0.0963284556850688
Optimal Design P_1, Schlitz (exakt)	7.83238773919591
Optimal Design P_1, Schlitz ($f \equiv 1$)	-0.146290348565174
Optimal Design $P_0 - RT_0$, L-förmig (exakt)	1.10194343365139
Optimal Design $P_0 - RT_0$, L-förmig ($f \equiv 1$)	-0.0963284556850688
Optimal Design $P_0 - RT_0$, Schlitz (exakt)	7.81356232506497
Optimal Design $P_0 - RT_0$, Schlitz ($f \equiv 1$)	-0.148181178837818
2-Well Benchmark (konvex, exakt)	0.107826374840891
2-Well Benchmark (konvex,$f \equiv 1, u_D \equiv 0$)	1.45193218965457
p-Laplace, L-förmig (exakt)	1.83621443564462
p-Laplace, L-förmig ($f \equiv 1$)	-0.0535018557045206
p-Laplace, Einheitsquadrat (exakt)	-0.0222222231564652
p-Laplace, Einheitsquadrat ($f \equiv 1$)	-0.00878618555043987

Tabelle 7.1: Extrapolierte Energien für die verschiedenen Beispiele.

7.3 Optimal Design Problem

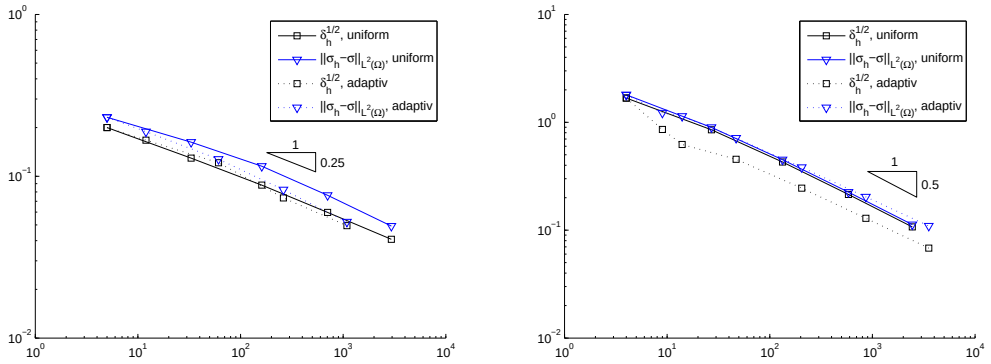


Abbildung 7.1: Vergleich des Fehlermaßes mit dem Spannungsfehler auf einem L-förmigen Gebiet und einem Schlitzgebiet mit bekannter exakter Lösung.

In Abbildung 7.1 wird das Fehlermaß aus Abschnitt 7.2 mit dem Spannungsfehler verglichen. Für das Optimal Design Problem gilt, dass der Energiefehler $\delta_\ell^{1/2}$ ein zuverlässiges und effizientes Fehlermaß für den Spannungsfehler darstellt. Die Konvergenzrate des Fehlermaßes wird daher auch von den Fehlerschätzern erwartet. In den weiteren Grafiken dieses Abschnitts wird zum Vergleich der Fehlerschätzer untereinander jeweils zuerst $\delta_\ell^{1/2}$ angegeben. Die Konvergenzraten der numerischen Beispiele unterscheiden sich von den Konvergenzraten aus Abbildung 7.1. Für beide Beispiele wird nach [29] eine Konvergenzrate von 1/4 erwartet.
Im Folgenden werden die Fehlerschätzer aus den vorigen Kapiteln miteinander verglichen.

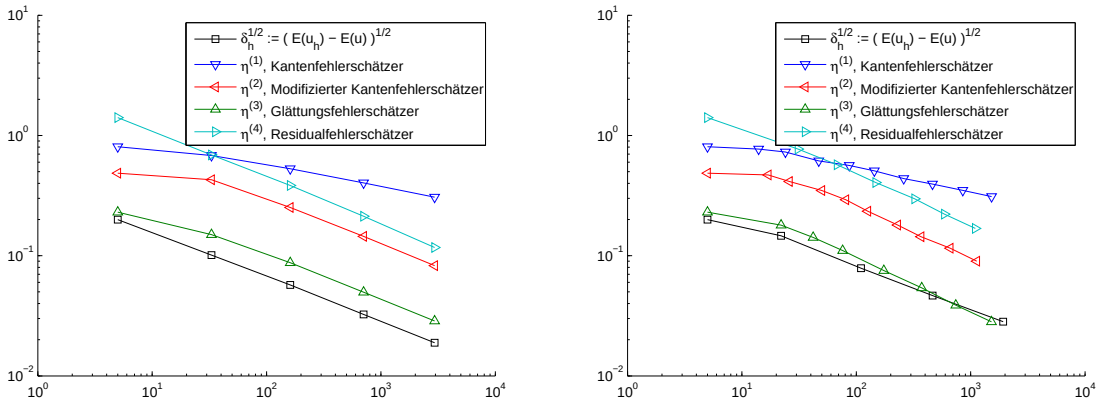


Abbildung 7.2: Uniformer und adaptiver Vergleich der Fehlerschätzer $\eta_\ell^{(1)} - \eta_\ell^{(4)}$ bezüglich des Fehlermaßes δ_ℓ für das Optimal Design Problem auf einem L-förmigen Gebiet.

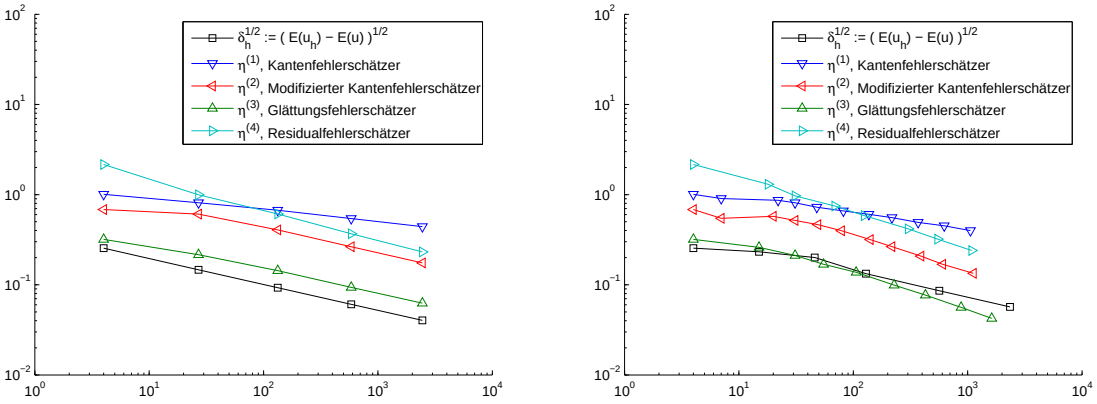


Abbildung 7.3: Uniformer und adaptiver Vergleich der Fehlerschätzer $\eta_\ell^{(1)} - \eta_\ell^{(4)}$ bezüglich des Fehlermaßes δ_ℓ für das Optimal Design Problem auf einem Schlitzgebiet.

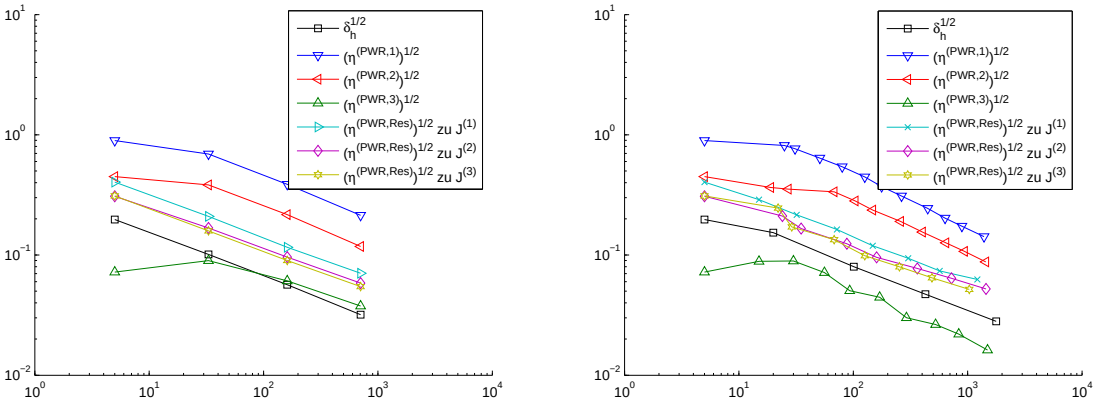


Abbildung 7.4: Uniformer und adaptiver Vergleich der primalen Fehlerschätzer bezüglich des Fehlermaßes δ_ℓ für das Optimal Design Problem auf einem L-förmigen Gebiet.

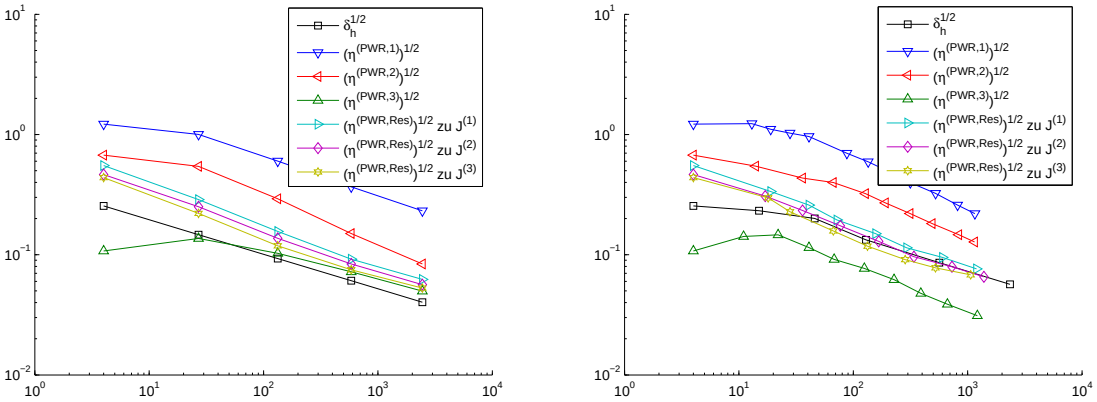


Abbildung 7.5: Uniformer und adaptiver Vergleich der primalen Fehlerschätzer bezüglich des Fehlermaßes δ_ℓ für das Optimal Design Problem auf einem Schlitzgebiet.

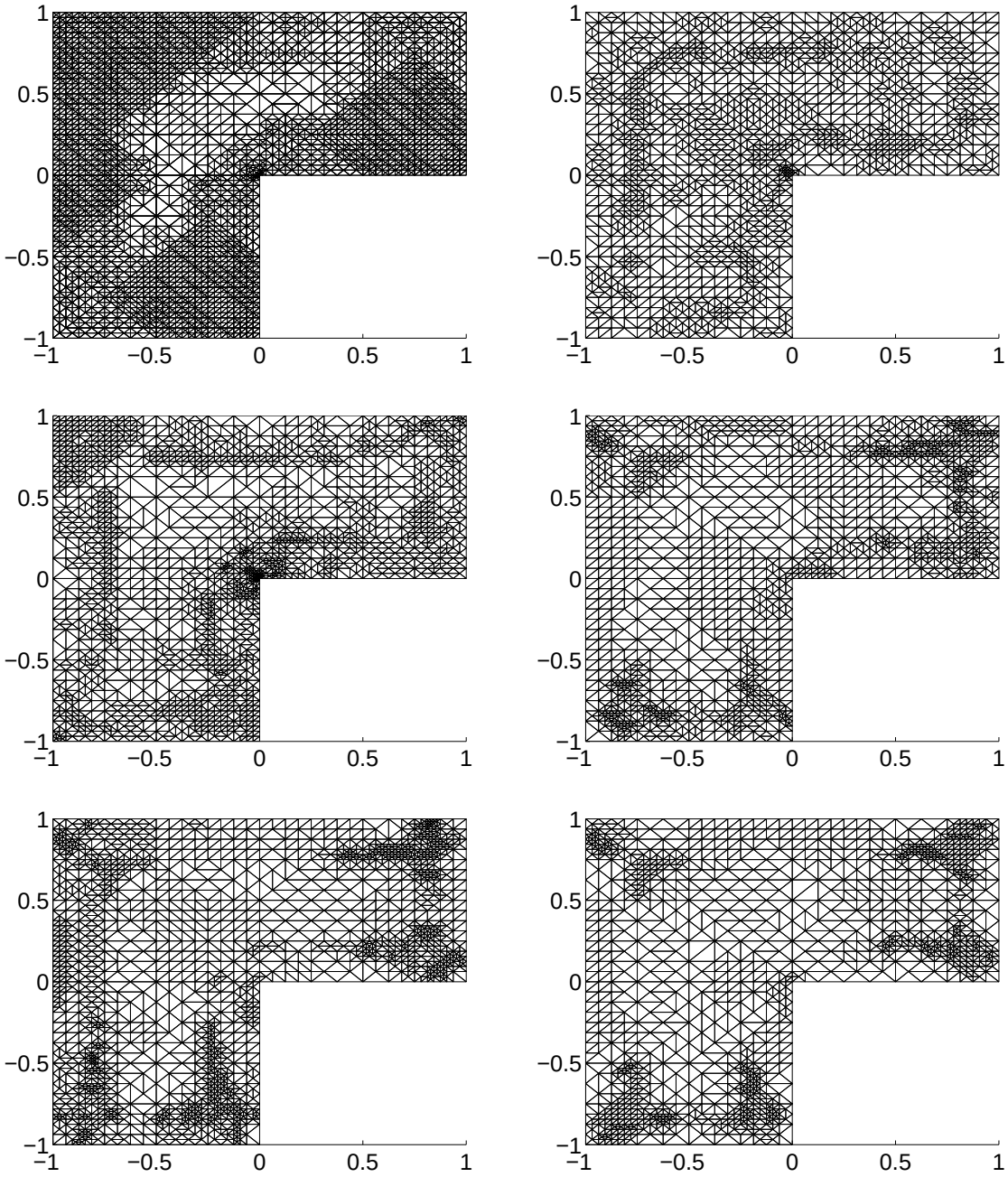


Abbildung 7.6: Vergleich der Gitter für verschiedene Fehlerschätzer für das Optimal Design Problem für das L-förmige Gebiet. Von oben links nach unten rechts: $\eta_\ell^{(PWR,1)}$, $\eta_\ell^{(PWR,2)}$ und $\eta_\ell^{(PWR,3)}$ sowie $\eta_\ell^{(PWR,Res1)}$ für das erste Zielfunktional $J^{(1)}$, $\eta_\ell^{(PWR,Res2)}$ für das zweite Zielfunktional $J^{(2)}$ und $\eta_\ell^{(PWR,Res3)}$ für das dritte Zielfunktional $J^{(3)}$.

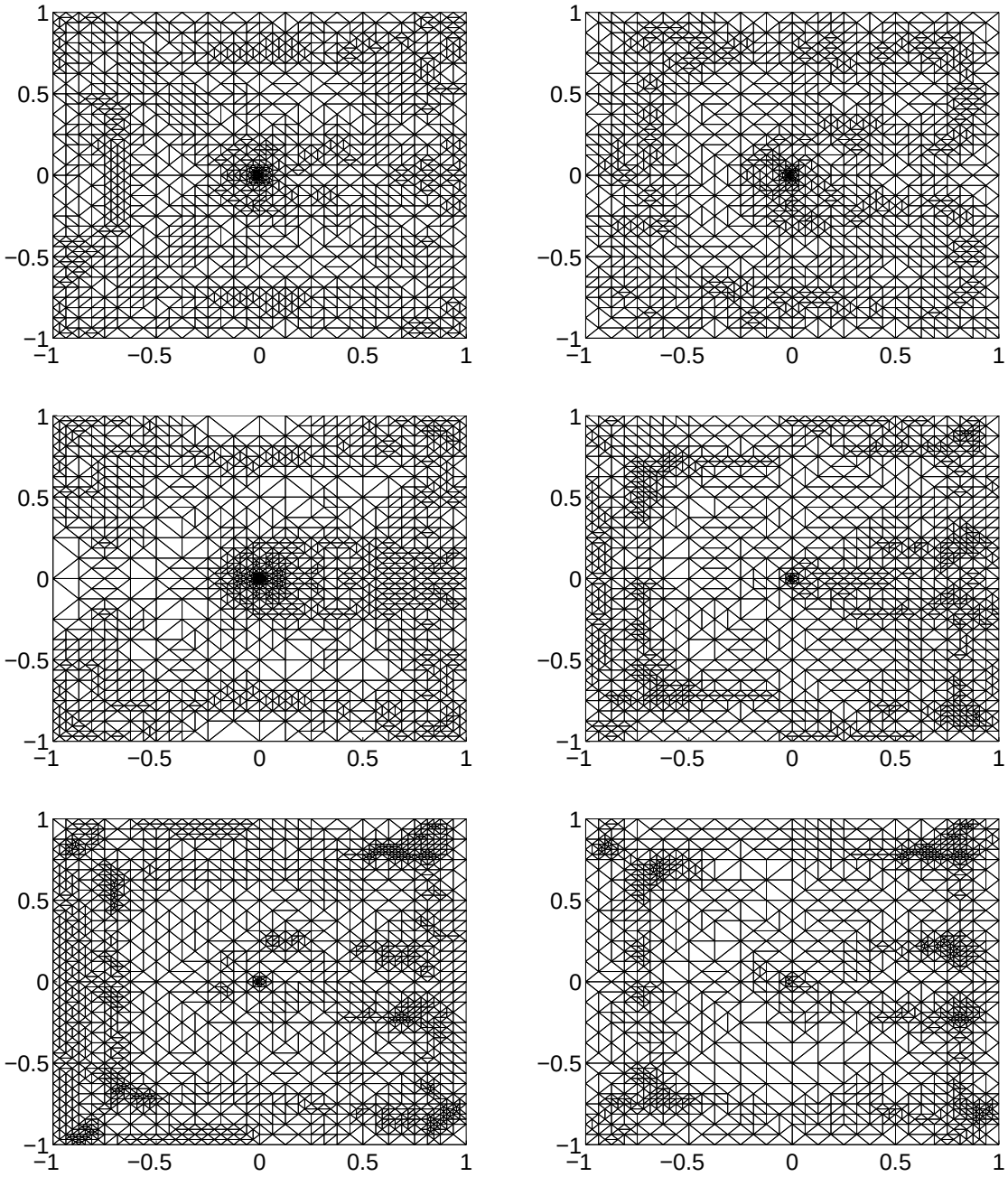


Abbildung 7.7: Vergleich der Gitter für verschiedene Fehlerschätzer für das Optimal Design Problem für das Schlitzgebiet. Von oben links nach unten rechts: $\eta_\ell^{(PWR,1)}$, $\eta_\ell^{(PWR,2)}$ und $\eta_\ell^{(PWR,3)}$ sowie $\eta_\ell^{(PWR,Res1)}$ für das erste Zielfunktional $J^{(1)}$, $\eta_\ell^{(PWR,Res2)}$ für das zweite Zielfunktional $J^{(2)}$ und $\eta_\ell^{(PWR,Res3)}$ für das dritte Zielfunktional $J^{(3)}$.

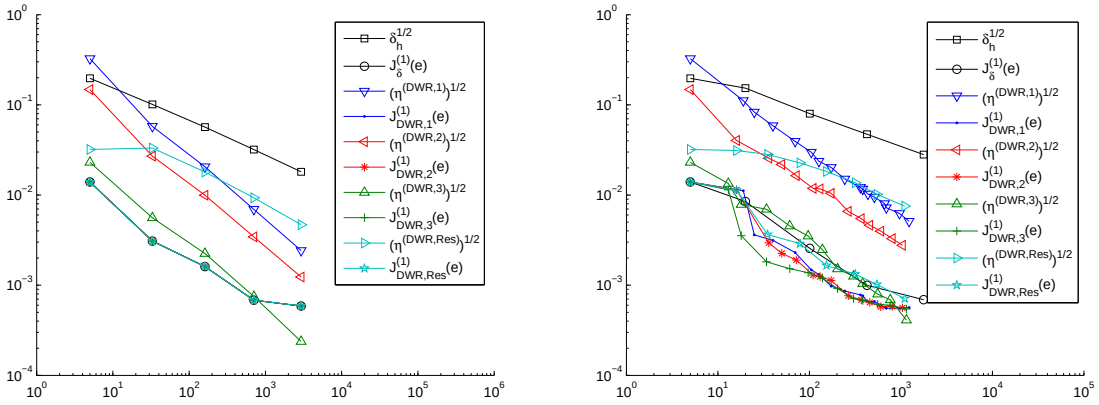


Abbildung 7.8: Uniformer und adaptiver Vergleich der dualen Fehlerschätzer $\eta_\ell^{(DWR,1)}$, $\eta_\ell^{(DWR,2)}$, $\eta_\ell^{(DWR,3)}$ sowie $\eta_\ell^{(DWR,Res)}$ bezüglich des Fehlermaßes δ_ℓ für das Optimal Design Problem auf einem L-förmigen Gebiet mit Zielfunktional $J^{(1)}$.

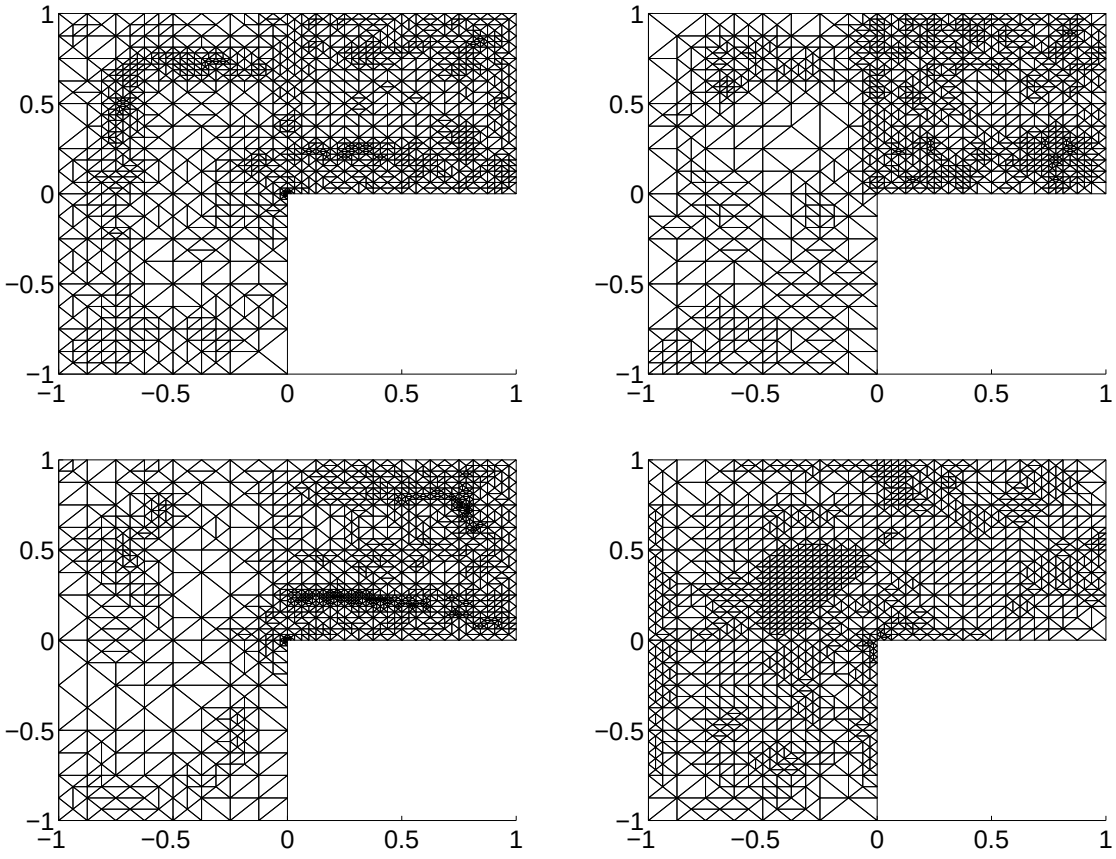


Abbildung 7.9: Vergleich der Gitter für verschiedene Fehlerschätzer für das L-förmige Gebiet und für das Zielfunktional $J^{(1)}$. Von oben links nach unten rechts: $\eta_\ell^{(DWR,1)}$, $\eta_\ell^{(DWR,2)}$, $\eta_\ell^{(DWR,3)}$ und $\eta_\ell^{(DWR,Res)}$.

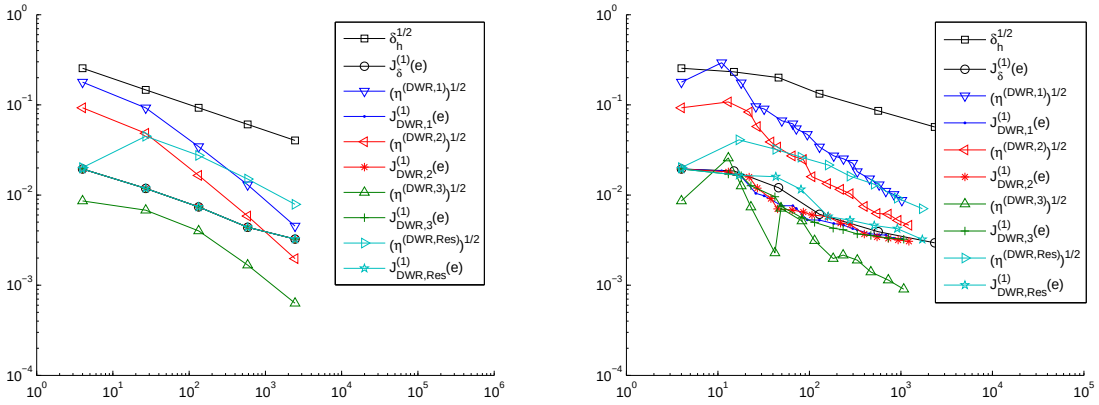


Abbildung 7.10: Uniformer und adaptiver Vergleich der dualen Fehlerschätzer $\eta_\ell^{(DWR,1)}$, $\eta_\ell^{(DWR,2)}$, $\eta_\ell^{(DWR,3)}$ sowie $\eta_\ell^{(DWR,Res)}$ bezüglich des Fehlermaßes δ_ℓ für das Optimal Design Problem auf einem Schlitzgebiet mit Zielfunktional $J^{(1)}$.

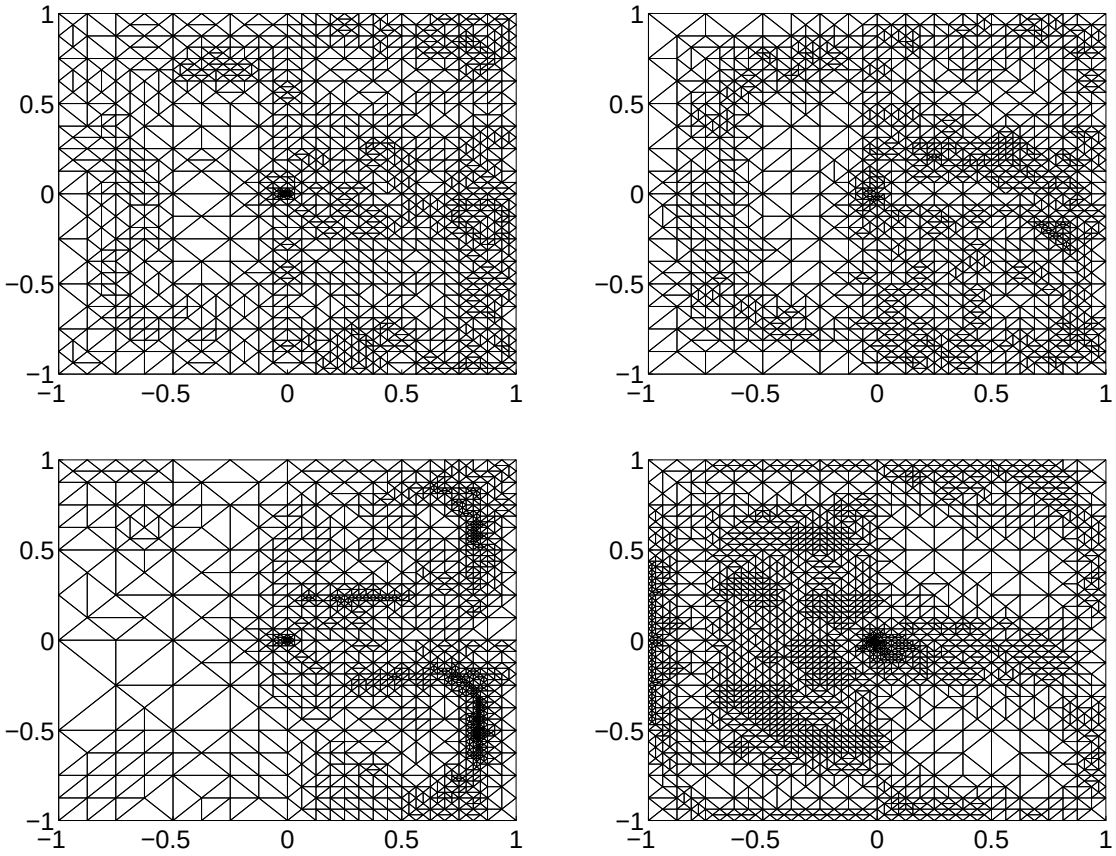


Abbildung 7.11: Vergleich der Gitter für verschiedene Fehlerschätzer für das Schlitzgebiet und für das Zielfunktional $J^{(1)}$. Von oben links nach unten rechts: $\eta_\ell^{(DWR,1)}$, $\eta_\ell^{(DWR,2)}$, $\eta_\ell^{(DWR,3)}$ und $\eta_\ell^{(DWR,Res)}$.

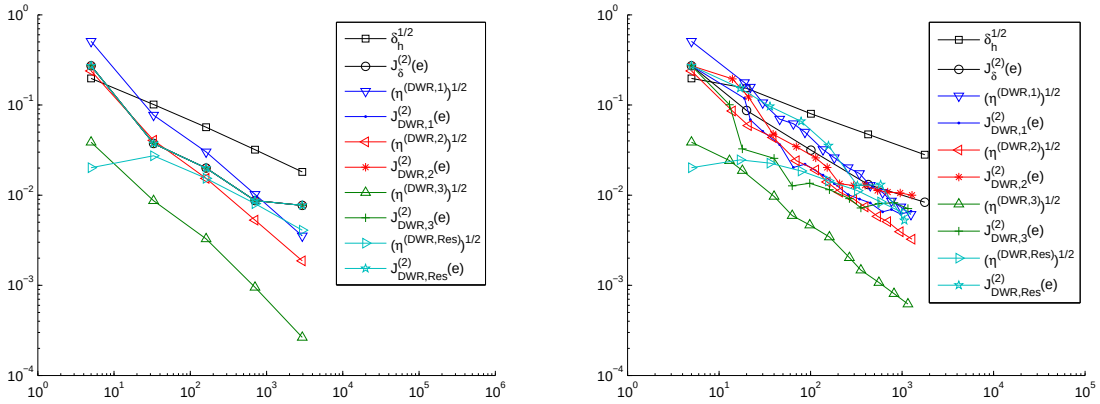


Abbildung 7.12: Uniformer und adaptiver Vergleich der dualen Fehlerschätzer $\eta_\ell^{(DWR,1)}$, $\eta_\ell^{(DWR,2)}$, $\eta_\ell^{(DWR,3)}$ sowie $\eta_\ell^{(DWR,Res)}$ bezüglich des Fehlermaßes δ_ℓ für das Optimal Design Problem auf einem L-förmigen Gebiet mit Zielfunktional $J^{(2)}$.

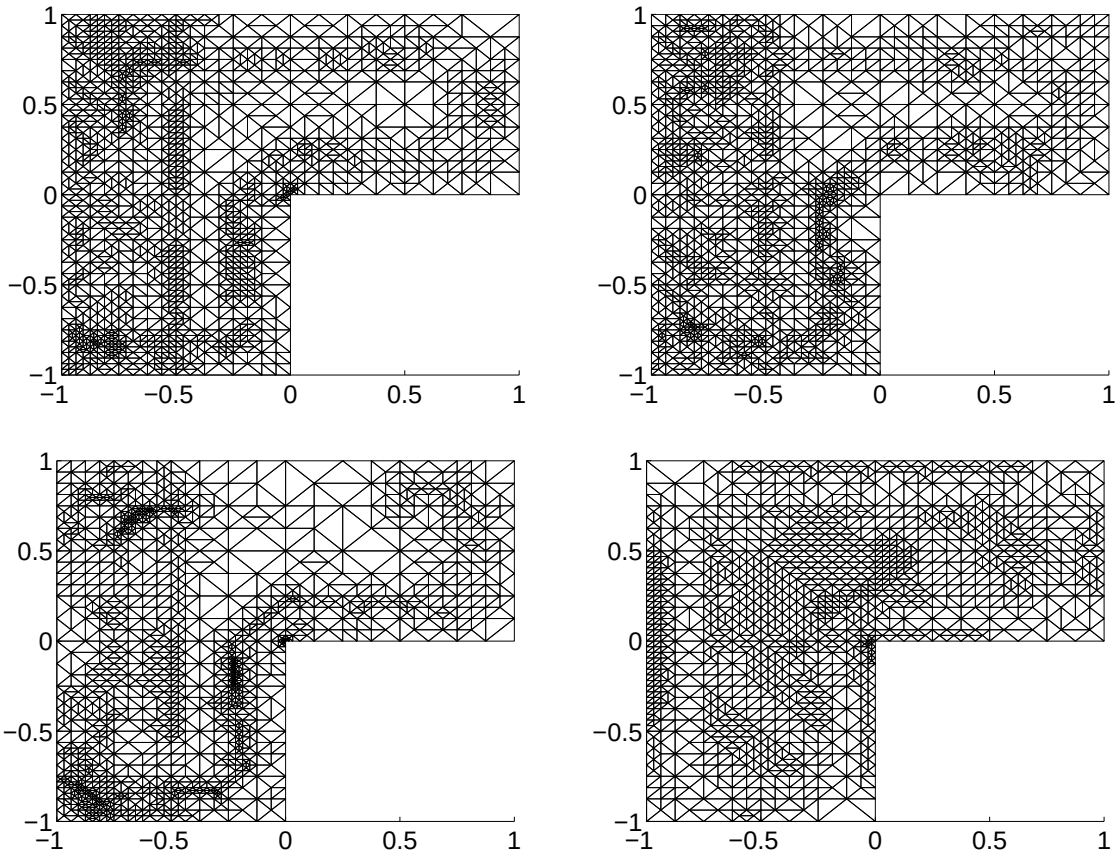


Abbildung 7.13: Vergleich der Gitter für verschiedene Fehlerschätzer für das L-förmige Gebiet und für das Zielfunktional $J^{(2)}$. Von oben links nach unten rechts: $\eta_\ell^{(DWR,1)}$, $\eta_\ell^{(DWR,2)}$, $\eta_\ell^{(DWR,3)}$ und $\eta_\ell^{(DWR,Res)}$.

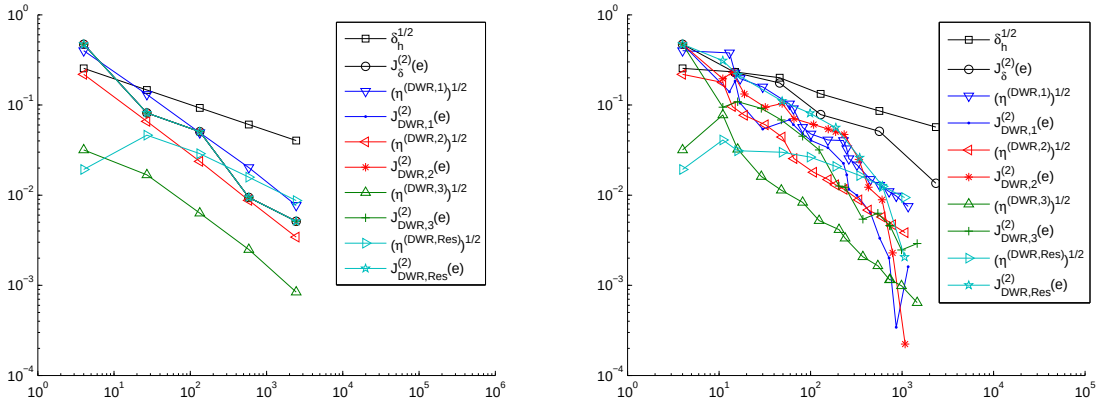


Abbildung 7.14: Uniformer und adaptiver Vergleich der dualen Fehlerschätzer $\eta_\ell^{(DWR,1)}$, $\eta_\ell^{(DWR,2)}$, $\eta_\ell^{(DWR,3)}$ sowie $\eta_\ell^{(DWR,Res)}$ bezüglich des Fehlermaßes δ_ℓ für das Optimal Design Problem auf einem Schlitzgebiet mit Zielfunktional $J^{(2)}$.

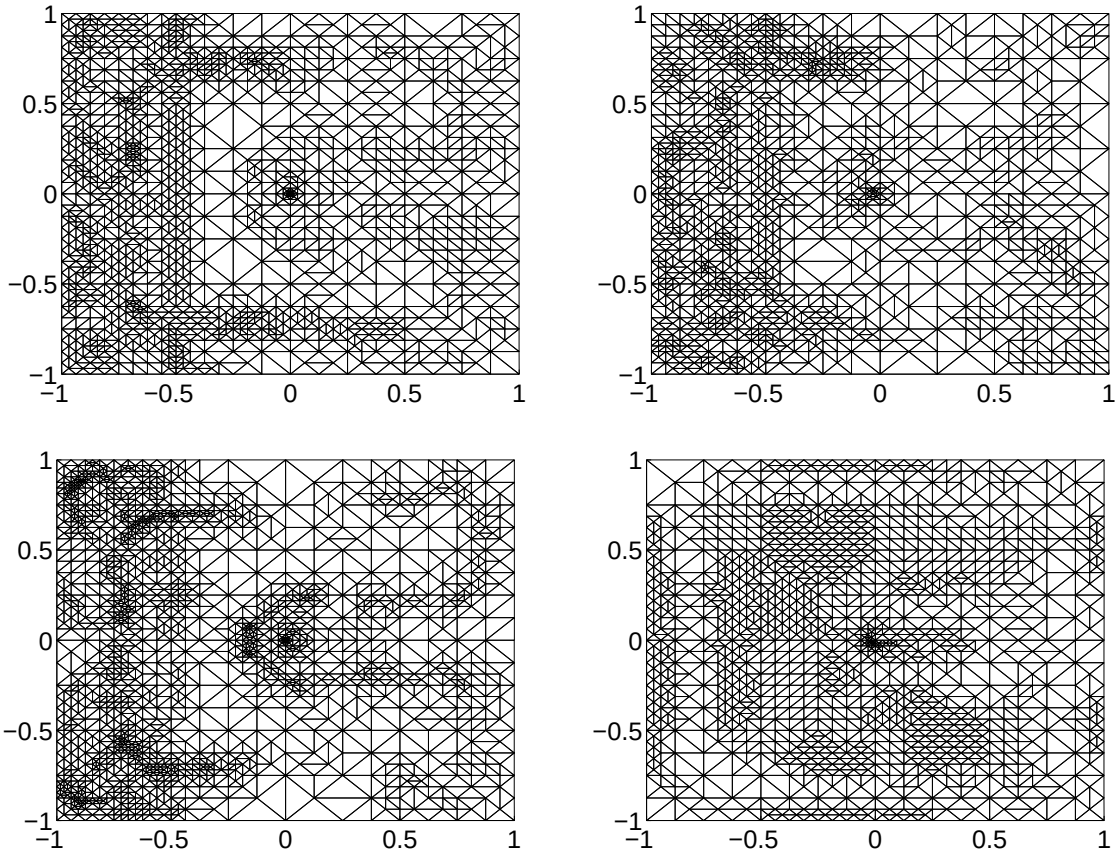


Abbildung 7.15: Vergleich der Gitter für verschiedene Fehlerschätzer für das Schlitzgebiet und für das Zielfunktional $J^{(2)}$. Von oben links nach unten rechts: $\eta_\ell^{(DWR,1)}$, $\eta_\ell^{(DWR,2)}$, $\eta_\ell^{(DWR,3)}$ und $\eta_\ell^{(DWR,Res)}$.

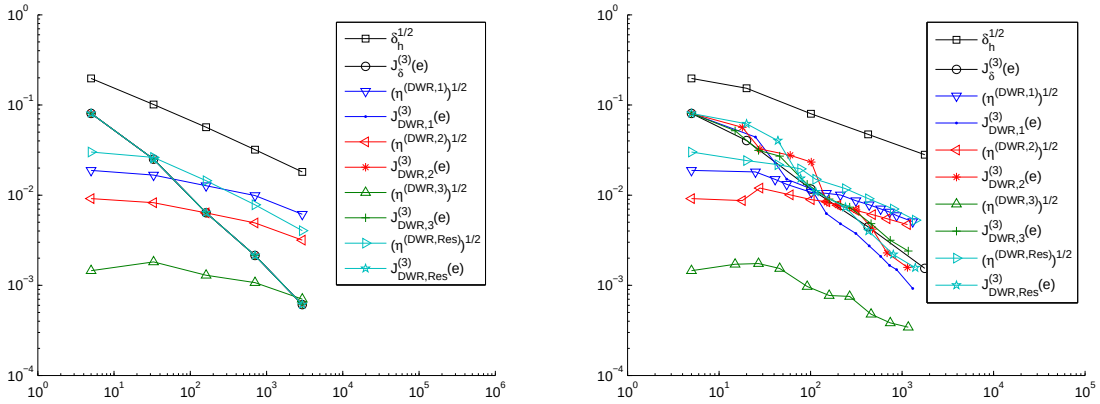


Abbildung 7.16: Uniformer und adaptiver Vergleich der dualen Fehlerschätzer $\eta_\ell^{(DWR,1)}$, $\eta_\ell^{(DWR,2)}$, $\eta_\ell^{(DWR,3)}$ sowie $\eta_\ell^{(DWR,Res)}$ bezüglich des Fehlermaßes δ_ℓ für das Optimal Design Problem auf einem L-förmigen Gebiet mit Zielfunktional $J^{(3)}$.

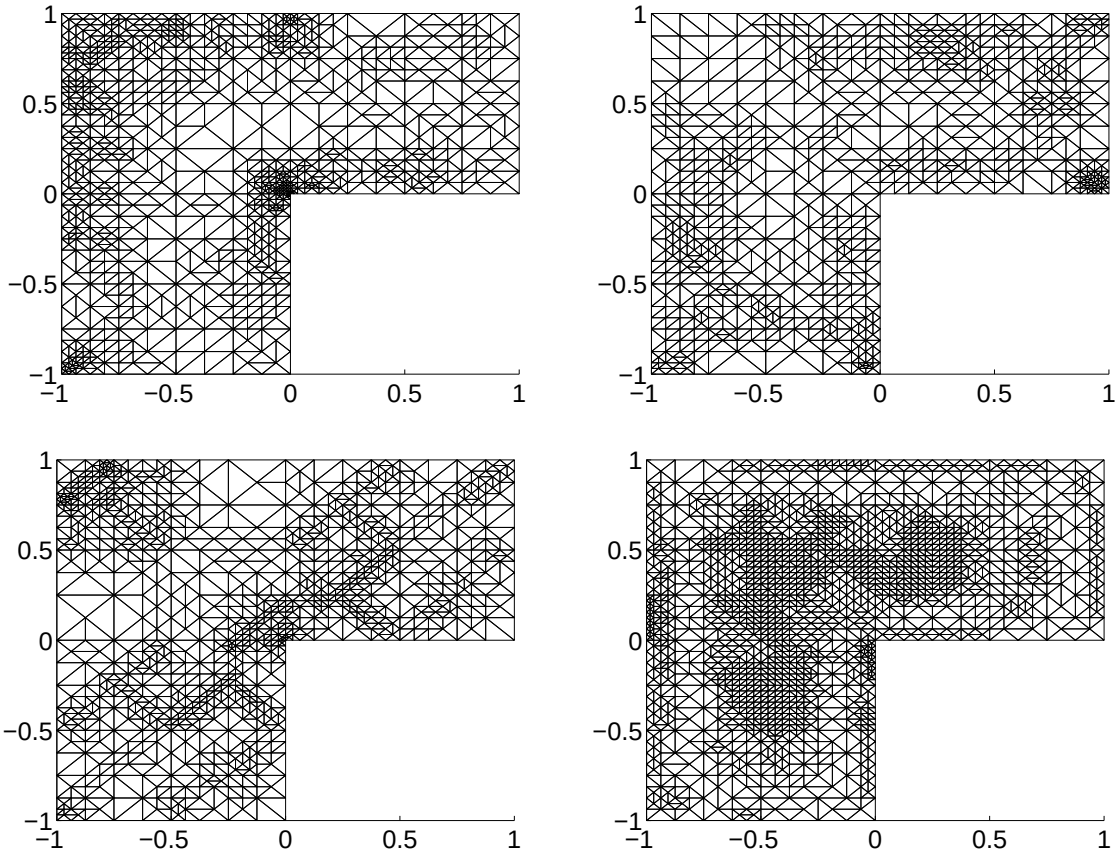


Abbildung 7.17: Vergleich der Gitter für verschiedene Fehlerschätzer für das L-förmige Gebiet und für das Zielfunktional $J^{(3)}$. Von oben links nach unten rechts: $\eta_\ell^{(DWR,1)}$, $\eta_\ell^{(DWR,2)}$, $\eta_\ell^{(DWR,3)}$ und $\eta_\ell^{(DWR,Res)}$.

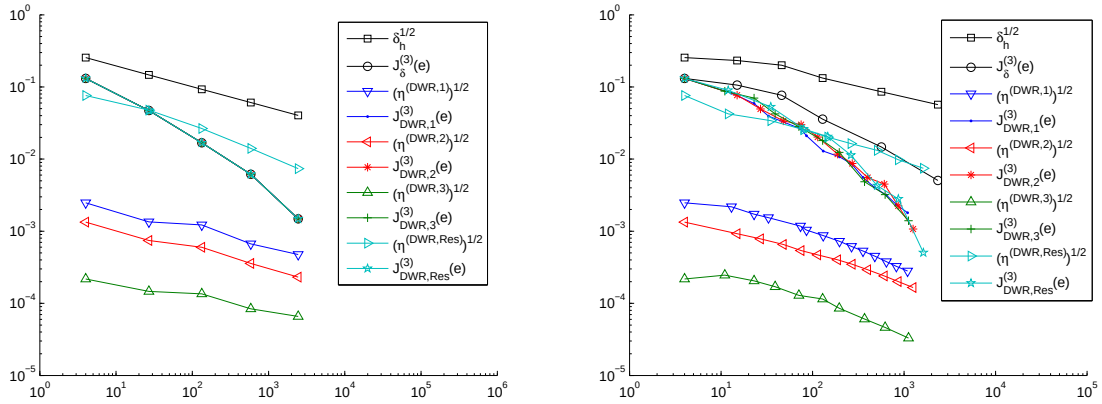


Abbildung 7.18: Uniformer und adaptiver Vergleich der dualen Fehlerschätzer $\eta_\ell^{(DWR,1)}$, $\eta_\ell^{(DWR,2)}$, $\eta_\ell^{(DWR,3)}$ sowie $\eta_\ell^{(DWR,Res)}$ bezüglich des Fehlermaßes δ_ℓ für das Optimal Design Problem auf einem Schlitzgebiet mit Zielfunktional $J^{(3)}$.

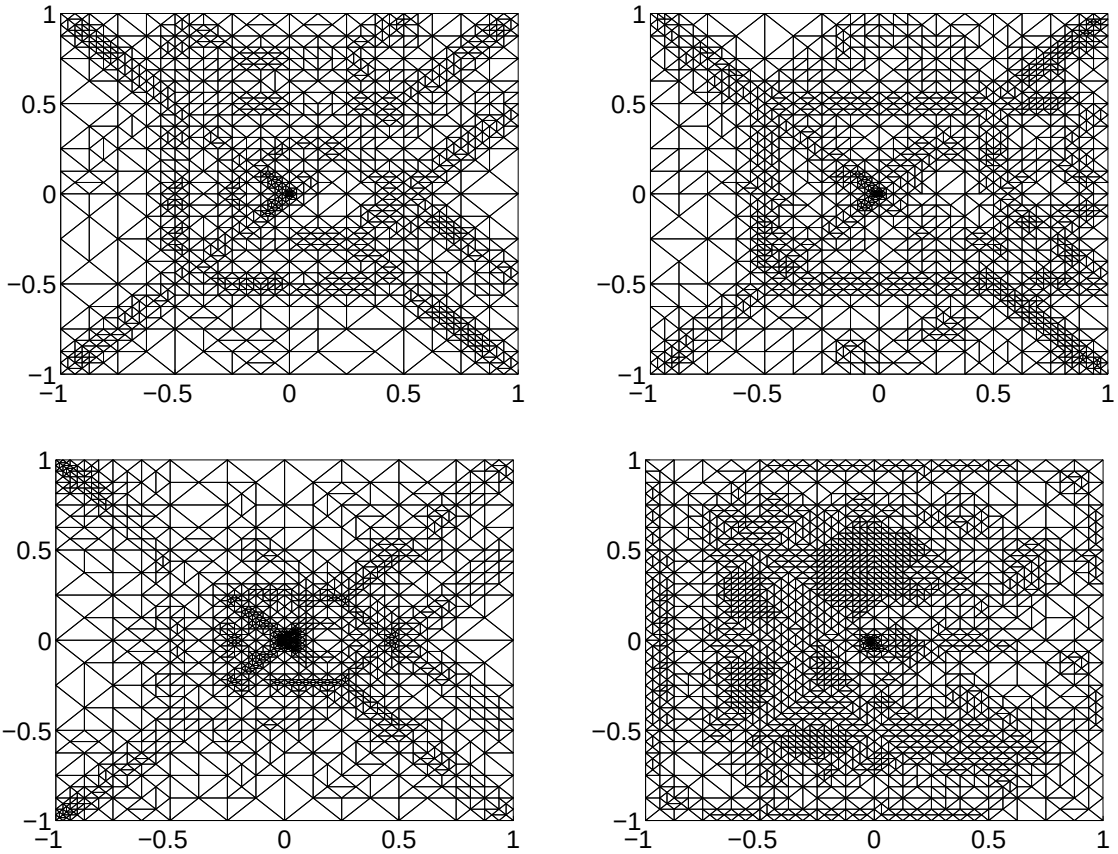


Abbildung 7.19: Vergleich der Gitter für verschiedene Fehlerschätzer für das Schlitzgebiet und für das Zielfunktional $J^{(3)}$. Von oben links nach unten rechts: $\eta_\ell^{(DWR,1)}$, $\eta_\ell^{(DWR,2)}$, $\eta_\ell^{(DWR,3)}$ und $\eta_\ell^{(DWR,Res)}$.

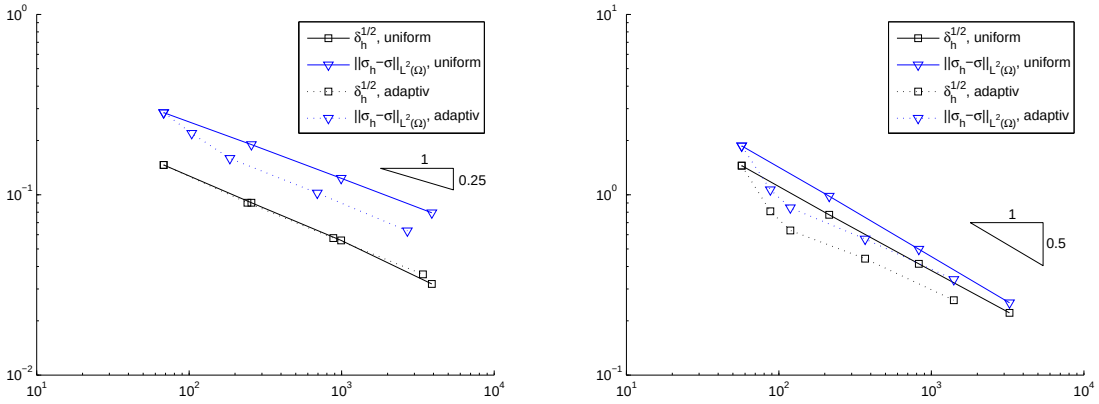


Abbildung 7.20: Vergleich des Fehlermaßes mit dem Spannungsfehler für das Optimal Design Problem auf einem L-förmigen Gebiet und einem Schlitzgebiet mit bekannter exakter Lösung und mit $\mathrm{P}_0 - \mathrm{RT}_0-$*Modellierung.*

Nun werden die Fehlerschätzer für die $\mathrm{P}_0 - \mathrm{RT}_0-$Modellierung miteinander verglichen. In Abbildung 7.20 wird das Fehlermaß $\delta_\ell^{1/2}$ mit dem Spannungsfehler für uniforme und adaptive Verfeinerung auf den beiden Gebieten des Optimale Design Problems verglichen. Die erwartete Konvergenzrate der Fehlerschätzer beträgt damit $1/4$ auf dem L-förmigen Gebiet und $1/2$ auf dem Schlitzgebiet. Die Konvergenzraten entsprechen den Werten aus der P_1-Modellierung. Ebenso wie in dem vorigen Abschnitt gilt, dass die erwartete Konvergenzrate der numerischen Testbeispiele auf beiden Gebieten $1/4$ ist.
Die $\mathrm{P}_0 - \mathrm{RT}_0-$Modellierung entspricht der gemischten Formulierung des Optimal Design Problems. Für diese wurde ein weiterer Fehlerschätzer definiert, der auf der Dualitätsbeziehung zwischen der Energiedichte $W(Dv)$ und der dazu dualen Energiedichte $W^*(Dv)$ basiert. Der Fehlerschätzer wurde in Abschnitt 3.7 hergeleitet.

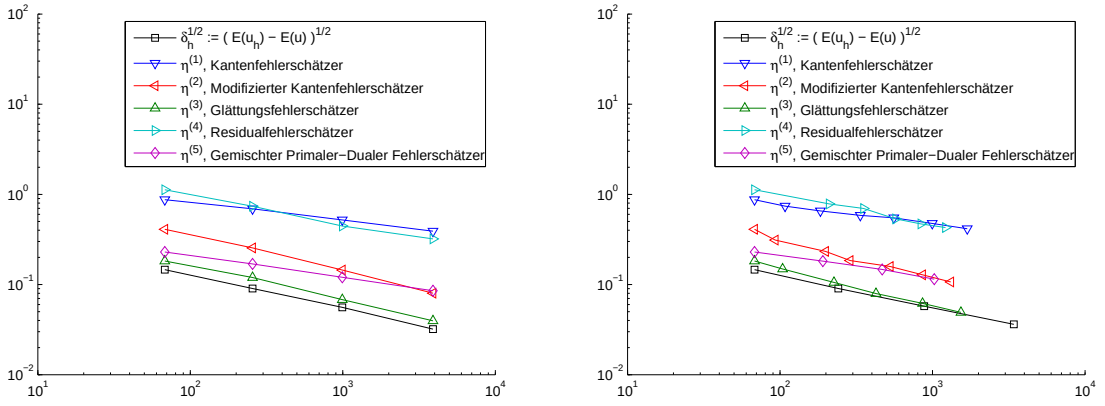


Abbildung 7.21: Uniformer und adaptiver Vergleich der Fehlerschätzer $\eta_\ell^{(1)} - \eta_\ell^{(5)}$ *bezüglich des Fehlermaßes* δ_ℓ *für das Optimal Design Problem auf einem L-förmigen Gebiet mit* $\mathrm{P}_0 - \mathrm{RT}_0-$*Modellierung.*

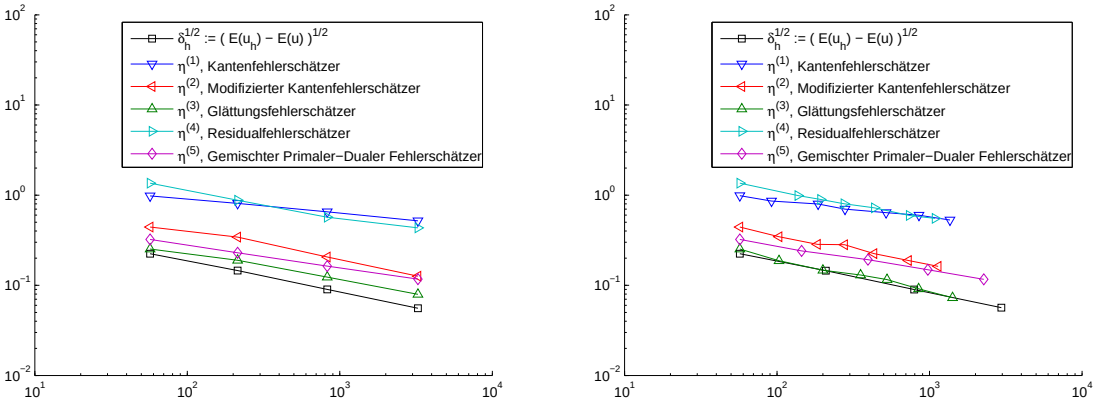


Abbildung 7.22: Uniformer und adaptiver Vergleich der Fehlerschätzer $\eta_\ell^{(1)} - \eta_\ell^{(5)}$ bezüglich des Fehlermaßes δ_ℓ für das Optimal Design Problem auf einem Schlitzgebiet mit $\mathrm{P}_0 - \mathrm{RT}_0$*−Modellierung.*

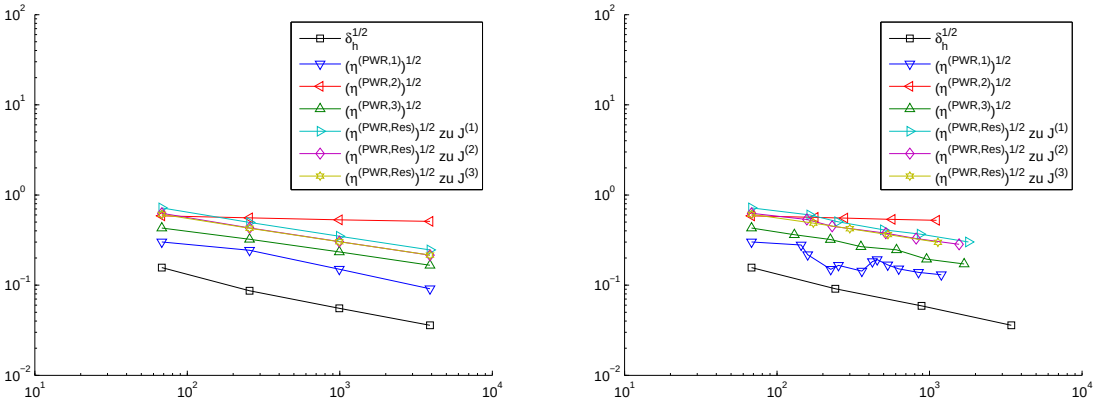


Abbildung 7.23: Uniformer und adaptiver Vergleich der primalen Fehlerschätzer bezüglich des Fehlermaßes δ_ℓ für das Optimal Design Problem auf einem L-förmigen Gebiet mit $\mathrm{P}_0 - \mathrm{RT}_0$*−Modellierung.*

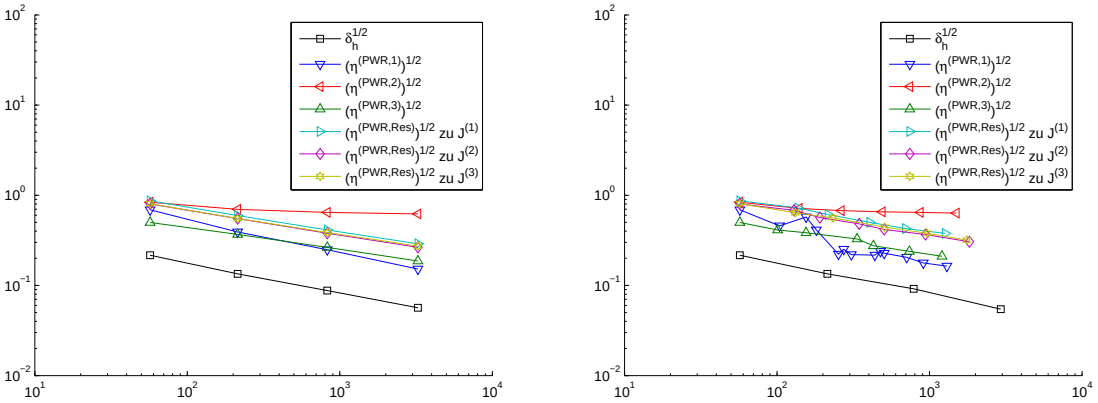


Abbildung 7.24: Uniformer und adaptiver Vergleich der primalen Fehlerschätzer bezüglich des Fehlermaßes δ_ℓ für das Optimal Design Problem auf einem Schlitzgebiet mit $\mathrm{P}_0 - \mathrm{RT}_0$*−Modellierung.*

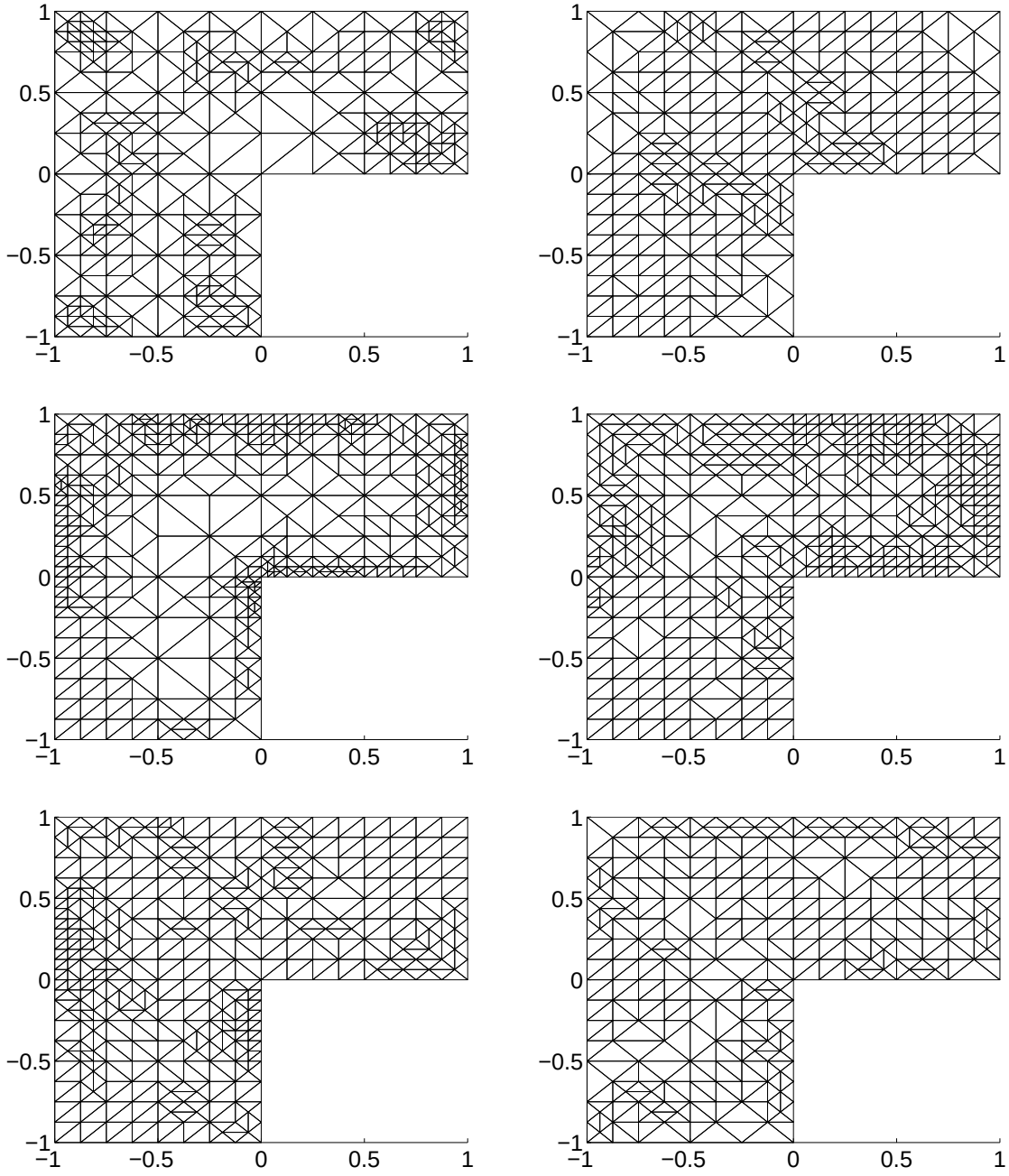


Abbildung 7.25: Vergleich der Gitter für verschiedene Fehlerschätzer für das Optimal Design Problem für das L-förmige Gebiet mit $\mathrm{P}_0 - \mathrm{RT}_0-$*Modellierung. Von oben links nach unten rechts:* $\eta_\ell^{(PWR,1)}$, $\eta_\ell^{(PWR,2)}$ *und* $\eta_\ell^{(PWR,3)}$ *sowie* $\eta_\ell^{(PWR,Res1)}$ *für das erste Zielfunktional* $J^{(1)}$, $\eta_\ell^{(PWR,Res2)}$ *für das zweite Zielfunktional* $J^{(2)}$ *und* $\eta_\ell^{(PWR,Res3)}$ *für das dritte Zielfunktional* $J^{(3)}$.

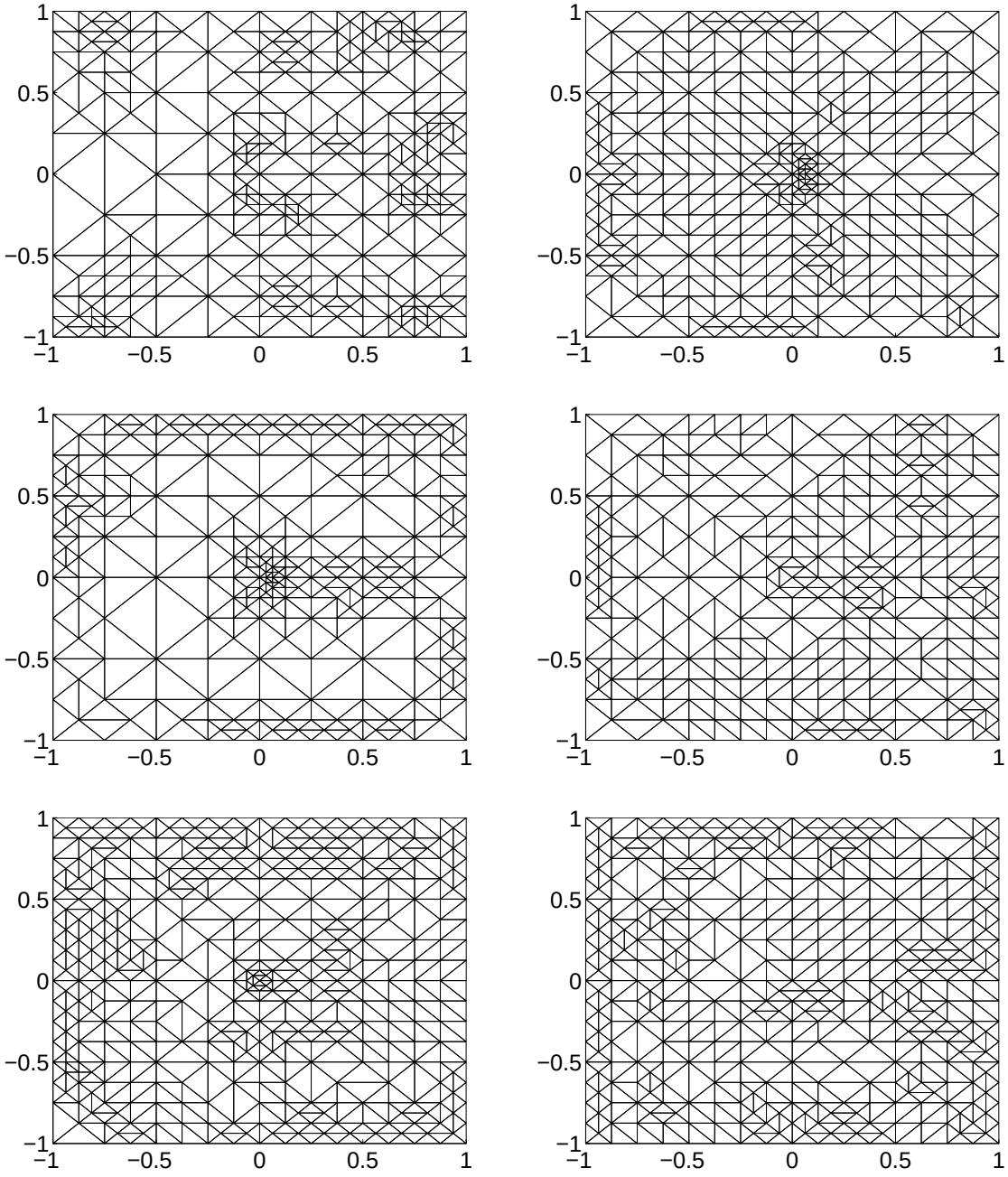


Abbildung 7.26: Vergleich der Gitter für verschiedene Fehlerschätzer für das Optimal Design Problem für das Schlitzgebiet mit $\mathrm{P}_0 - \mathrm{RT}_0 -$*Modellierung. Von oben links nach unten rechts:* $\eta_\ell^{(PWR,1)}$*,* $\eta_\ell^{(PWR,2)}$ *und* $\eta_\ell^{(PWR,3)}$ *sowie* $\eta_\ell^{(PWR,Res1)}$ *für das erste Zielfunktional* $J^{(1)}$*,* $\eta_\ell^{(PWR,Res2)}$ *für das zweite Zielfunktional* $J^{(2)}$ *und* $\eta_\ell^{(PWR,Res3)}$ *für das dritte Zielfunktional* $J^{(3)}$*.*

7.4 2−Well Benchmark Problem

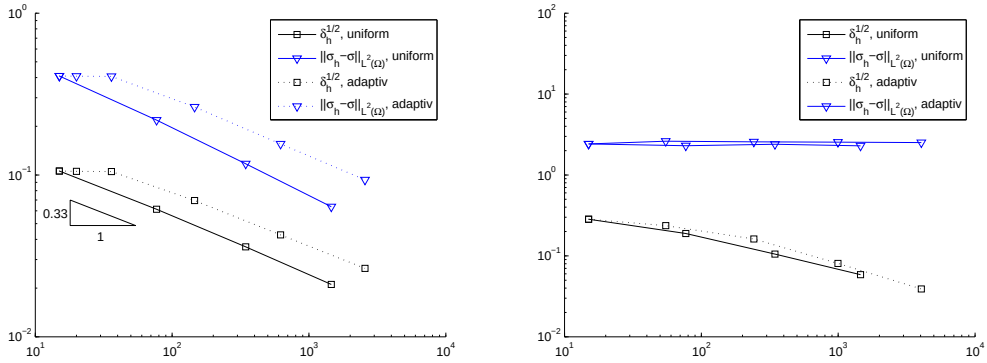


Abbildung 7.27: Vergleich des Fehlermaßes mit dem Spannungsfehler mit vorgegebenen Randdaten u_D und Funktion f_0 einmal für den konvexen und einmal für den nicht-konvexen Fall. Im zweiten Fall ist die Spannung σ nicht eindeutig und die Konvergenzraten sind falsch.

In Abbildung 7.27 ist der Spannungsfehler in der $L^{4/3}$-Norm gegenüber dem Fehlermaß $\delta_\ell^{1/2}$ abgebildet. Die erste Grafik behandelt das konvexifizierte Problem. Hier ist die Spannung σ eindeutig und die Konvergenzrate des Spannungsfehlers mit $1/3$ gegeben. Die zweite Grafik gibt den nicht-konvexen Fall wieder. In diesem Fall ist σ nicht eindeutig und stimmt nicht mit der approximierten Spannung σ_h überein. Dies entspricht der Theorie über nicht-konvexe Minimierungsprobleme und verdeutlicht die Notwendigkeit der Benutzung von Konvexifizierungen.
Im Folgenden werden die in dieser Arbeit motivierten Fehlerschätzer miteinander verglichen. Dazu wird neben dem ersten konvexen Beispiel mit vorgegebenen Randdaten u_D und Funktion f_0 ein weiteres Beispiel betrachtet, bei dem die exakte Lösung unbekannt ist. In diesem Beispiel werden homogene Randdaten $u_D \equiv 0$ gesetzt und eine konstante Funktion $f_0 \equiv 1$ benutzt. Hier wird ebenfalls eine Konvergenzrate von $1/3$ erwartet.

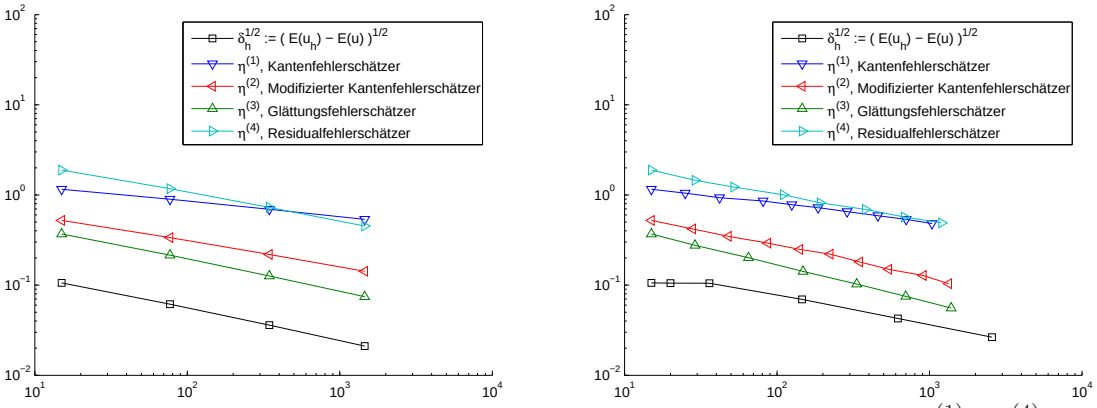


Abbildung 7.28: Uniformer und adaptiver Vergleich der Fehlerschätzer $\eta_\ell^{(1)} - \eta_\ell^{(4)}$ bezüglich des Fehlermaßes δ_ℓ für das konvexe 2−Well Benchmark Problem mit vorgegebenen Randdaten u_D und Funktion f_0.

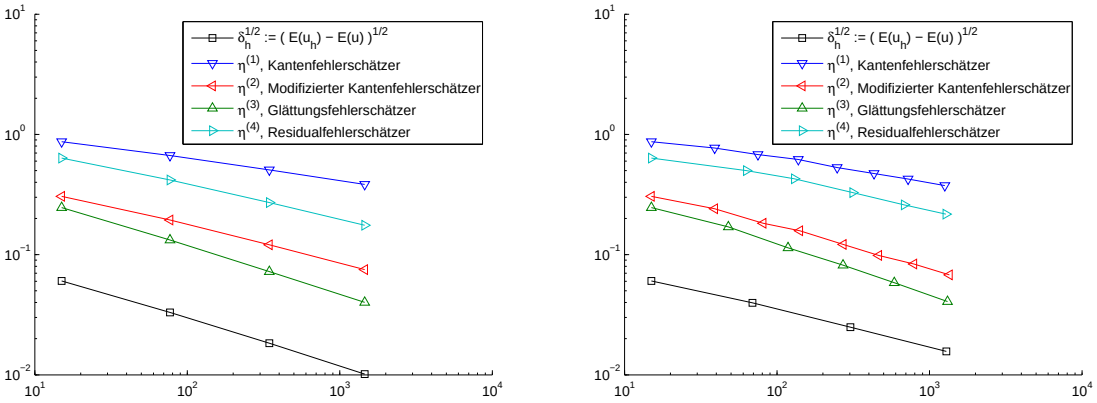


Abbildung 7.29: Uniformer und adaptiver Vergleich der Fehlerschätzer $\eta_\ell^{(1)} - \eta_\ell^{(4)}$ bezüglich des Fehlermaßes δ_ℓ für das konvexe $2-$Well Benchmark Problem mit $u_D \equiv 0$ und Funktion $f_0 \equiv 1$.

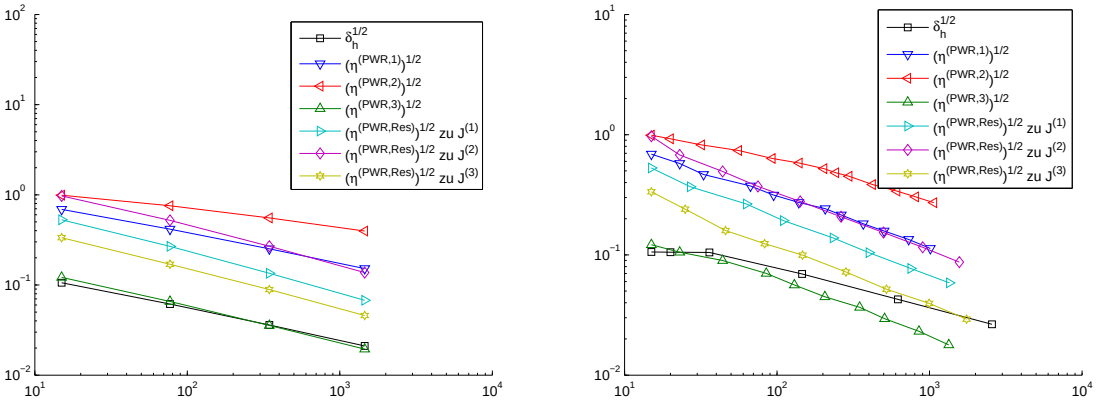


Abbildung 7.30: Uniformer und adaptiver Vergleich der primalen Fehlerschätzer $\eta_\ell^{(PWR,1)}$, $\eta_\ell^{(PWR,2)}$, $\eta_\ell^{(PWR,3)}$ sowie $\eta_\ell^{(PWR,Res)}$ bezüglich des Fehlermaßes δ_ℓ für das konvexe $2-$Well Benchmark Problem mit vorgegebenen Randdaten u_D und Funktion f_0.

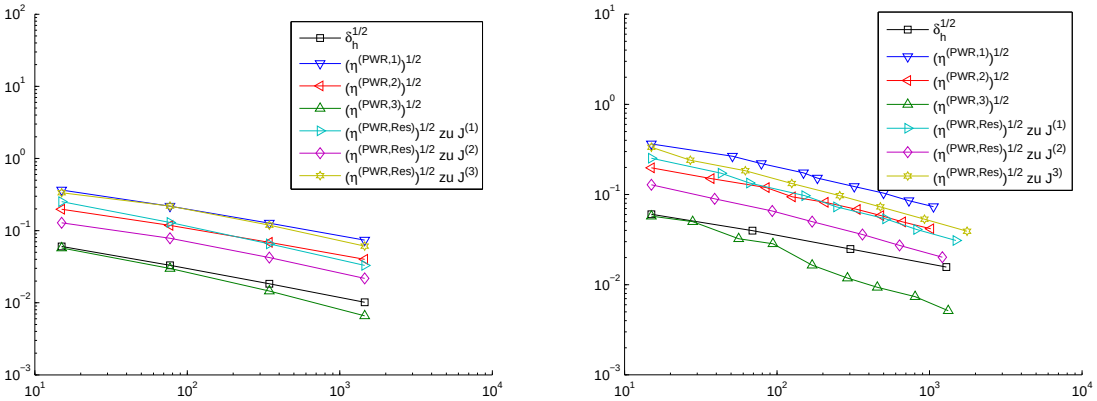


Abbildung 7.31: Uniformer und adaptiver Vergleich der primalen Fehlerschätzer $\eta_\ell^{(PWR,1)}$, $\eta_\ell^{(PWR,2)}$, $\eta_\ell^{(PWR,3)}$ sowie $\eta_\ell^{(PWR,Res)}$ bezüglich des Fehlermaßes δ_ℓ für das konvexe $2-$Well Benchmark Problem mit $u_D \equiv 0$ und Funktion $f_0 \equiv 1$.

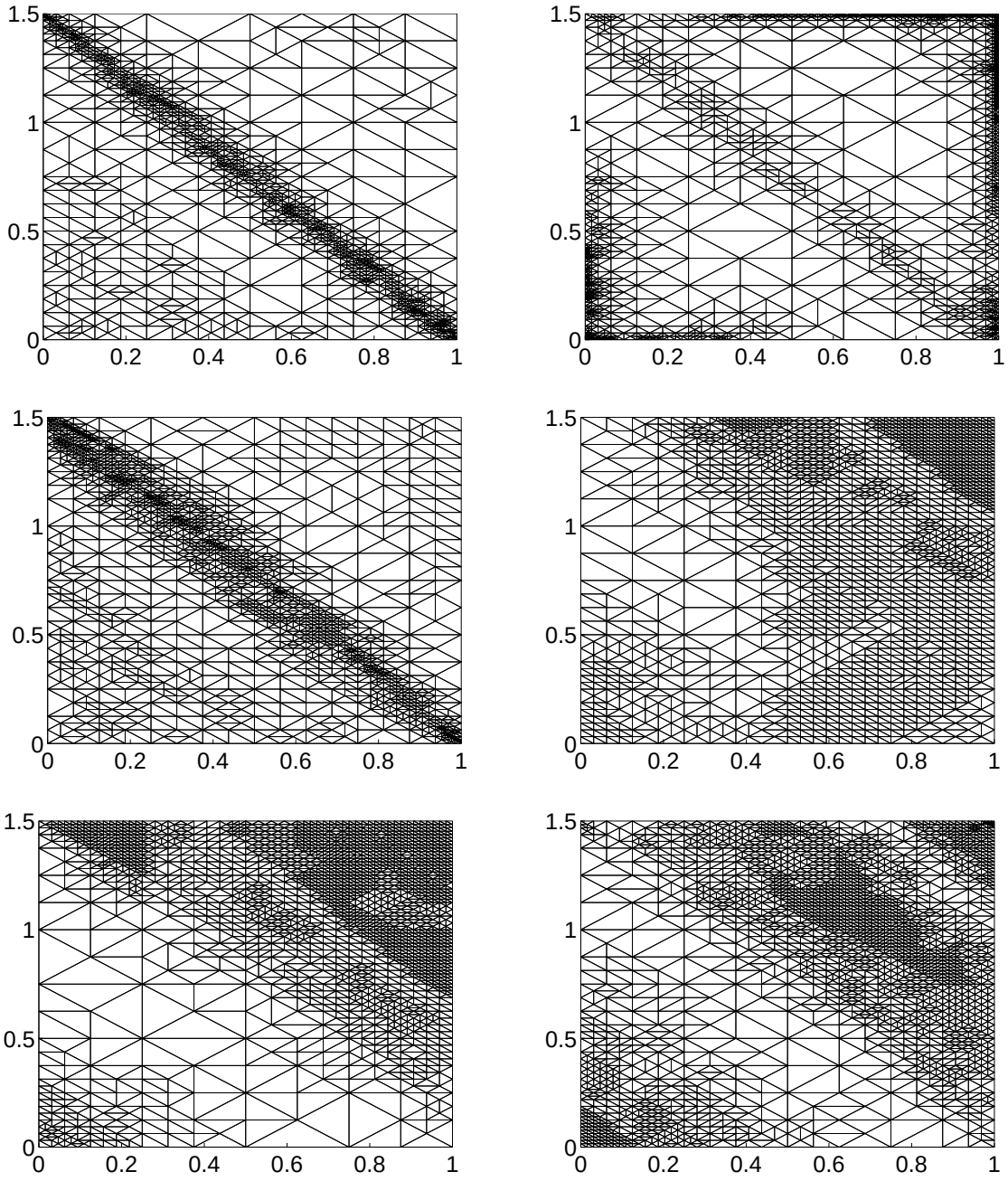


Abbildung 7.32: Vergleich der Gitter für verschiedene Fehlerschätzer für das konvexe $2-$Well Benchmark Problem mit vorgegebenen Randdaten u_D und Funktion f_0. Von links nach rechts: $\eta_\ell^{(PWR,1)}$, $\eta_\ell^{(PWR,2)}$ und $\eta_\ell^{(PWR,3)}$ sowie $\eta_\ell^{(PWR,Res1)}$ für das erste Zielfunktional $J^{(1)}$, $\eta_\ell^{(PWR,Res2)}$ für das zweite Zielfunktional $J^{(2)}$ und $\eta_\ell^{(PWR,Res3)}$ für das dritte Zielfunktional $J^{(3)}$.

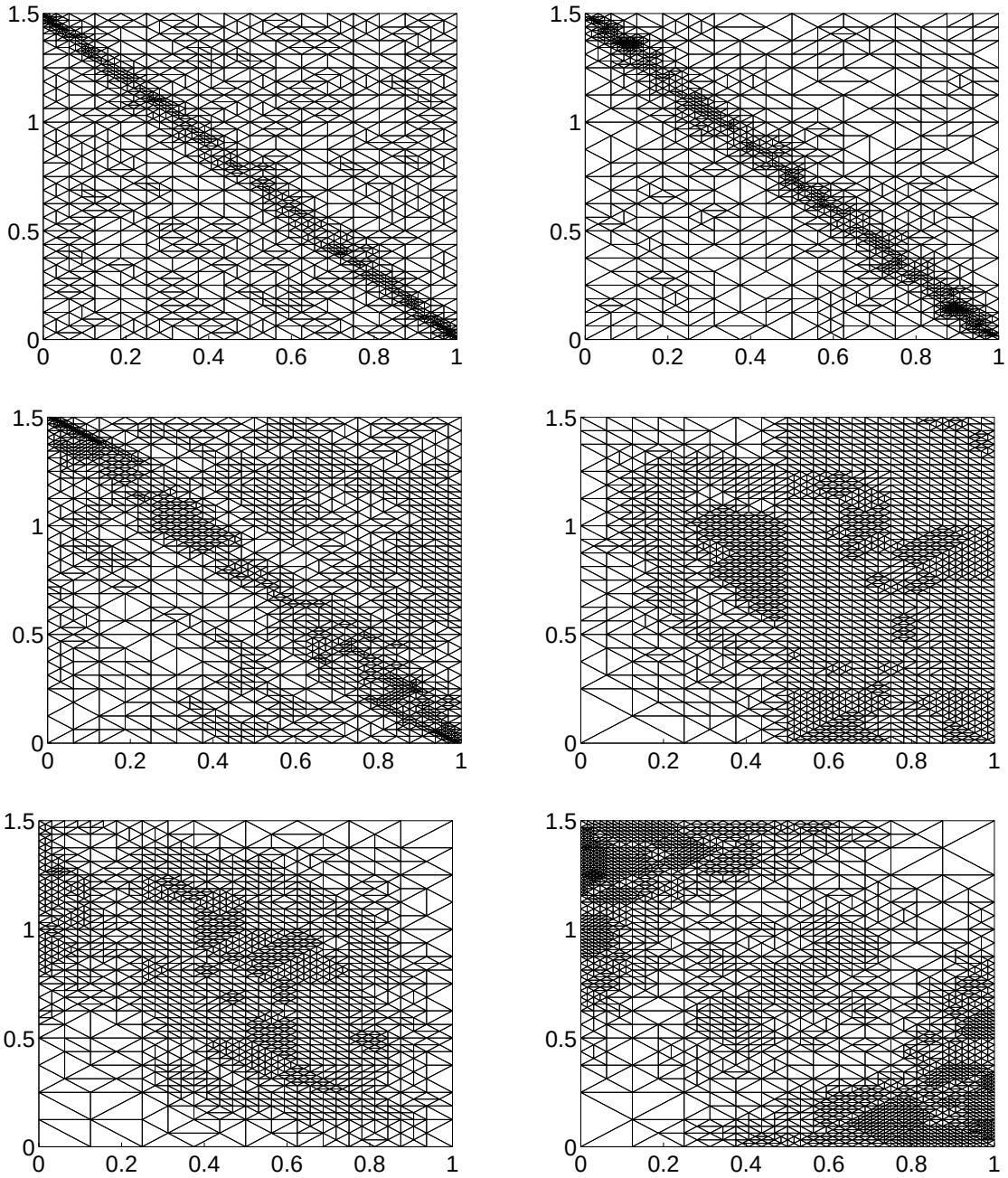


Abbildung 7.33: Vergleich der Gitter für verschiedene Fehlerschätzer für das konvexe 2−Well Benchmark Problem mit $u_D \equiv 0$ und Funktion $f_0 \equiv 1$. Von links nach rechts: $\eta_\ell^{(PWR,1)}$, $\eta_\ell^{(PWR,2)}$ und $\eta_\ell^{(PWR,3)}$ sowie $\eta_\ell^{(PWR,Res1)}$ für das erste Zielfunktional $J^{(1)}$, $\eta_\ell^{(PWR,Res2)}$ für das zweite Zielfunktional $J^{(2)}$ und $\eta_\ell^{(PWR,Res3)}$ für das dritte Zielfunktional $J^{(3)}$.

7.5 Laplace Problem

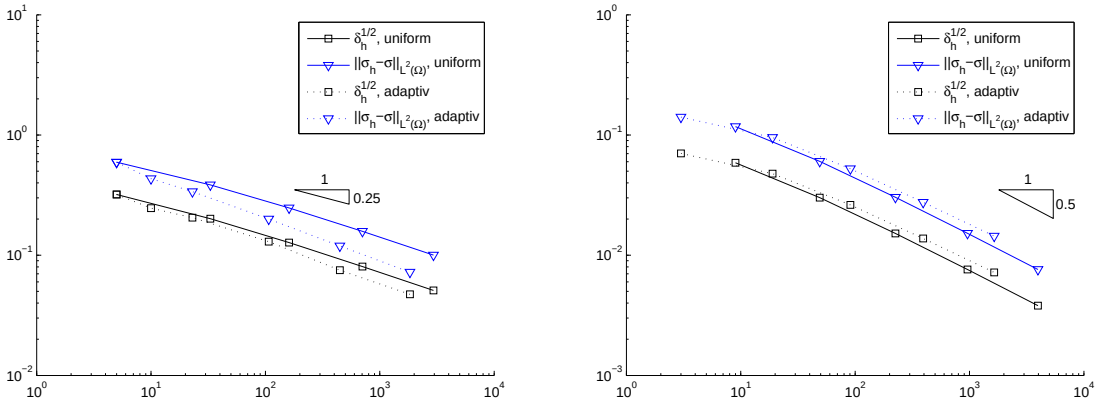


Abbildung 7.34: Vergleich des Fehlermaßes mit dem Spannungsfehler für das Laplace Problem auf einem L-förmigen Gebiet und einem Einheitsquadrat mit bekannter exakter Lösung.

In der Abbildung 7.34 wird wieder der Spannungsfehler mit dem Fehlermaß $\delta_\ell^{1/2}$ aus Abschnitt 7.2 verglichen. In den Grafiken der Fehlerschätzer wird immer zuerst $\delta_\ell^{1/2}$ als Fehlermaß angegeben.
Für beide Beispiele wird eine Konvergenzrate von 1/4 erwartet.
Diese Konvergenzraten entsprechen den Konvergenzraten der beiden Probleme des Optimal Design Problems.
Im Folgenden werden wieder die in dieser Arbeit hergeleiteten Fehlerschätzer miteinander verglichen.

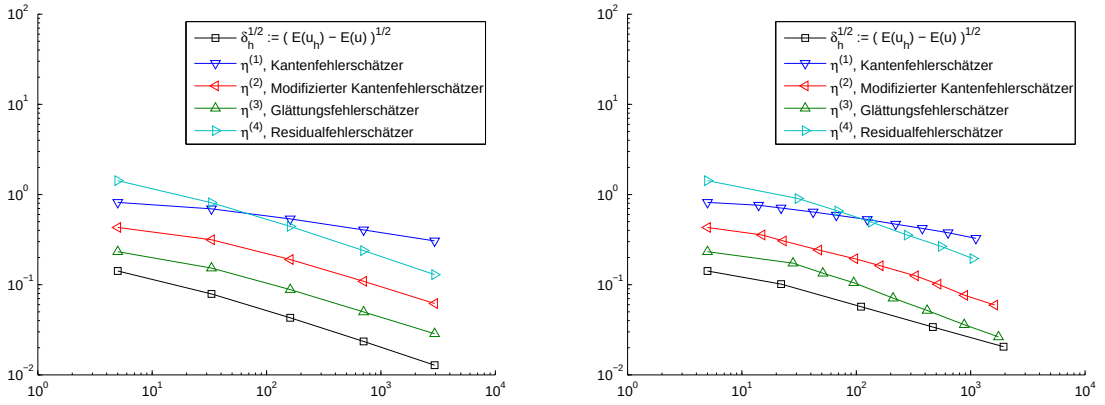


Abbildung 7.35: Uniformer und adaptiver Vergleich der Fehlerschätzer $\eta_\ell^{(1)} - \eta_\ell^{(4)}$ bezüglich des Fehlermaßes δ_ℓ für das Laplace Problem auf einem L-förmigen Gebiet.

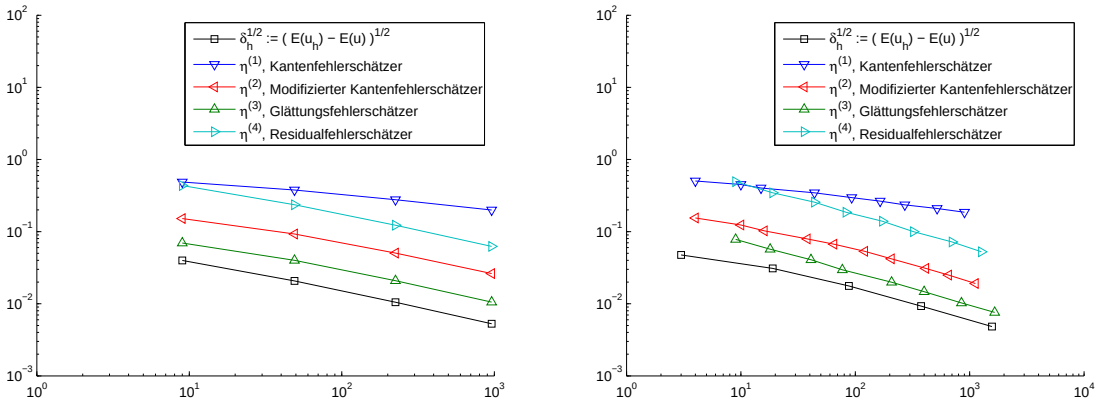


Abbildung 7.36: Uniformer und adaptiver Vergleich der Fehlerschätzer $\eta_\ell^{(1)} - \eta_\ell^{(4)}$ bezüglich des Fehlermaßes δ_ℓ für das Laplace Problem auf einem Einheitsquadrat.

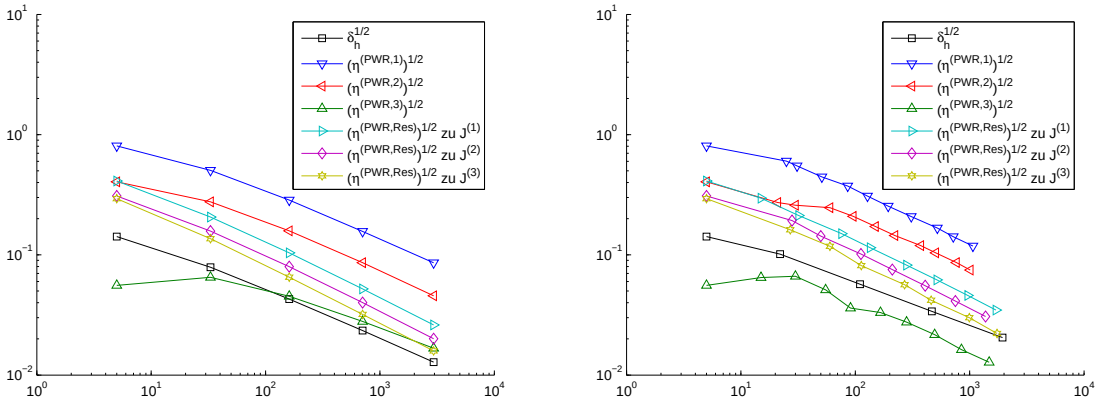


Abbildung 7.37: Uniformer und adaptiver Vergleich der primalen Fehlerschätzer $\eta_\ell^{(PWR,1)}$, $\eta_\ell^{(PWR,2)}$, $\eta_\ell^{(PWR,3)}$ sowie $\eta_\ell^{(PWR,Res)}$ bezüglich des Fehlermaßes δ_ℓ für das Laplace Problem auf einem L-förmigen Gebiet.

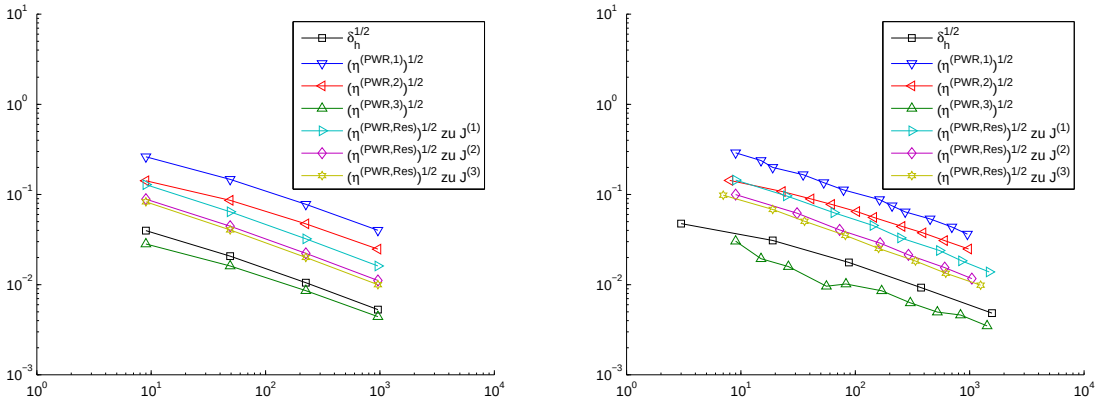


Abbildung 7.38: Uniformer und adaptiver Vergleich der primalen Fehlerschätzer $\eta_\ell^{(PWR,1)}$, $\eta_\ell^{(PWR,2)}$, $\eta_\ell^{(PWR,3)}$ sowie $\eta_\ell^{(PWR,Res)}$ bezüglich des Fehlermaßes δ_ℓ für das Laplace Problem auf einem Einheitsquadrat.

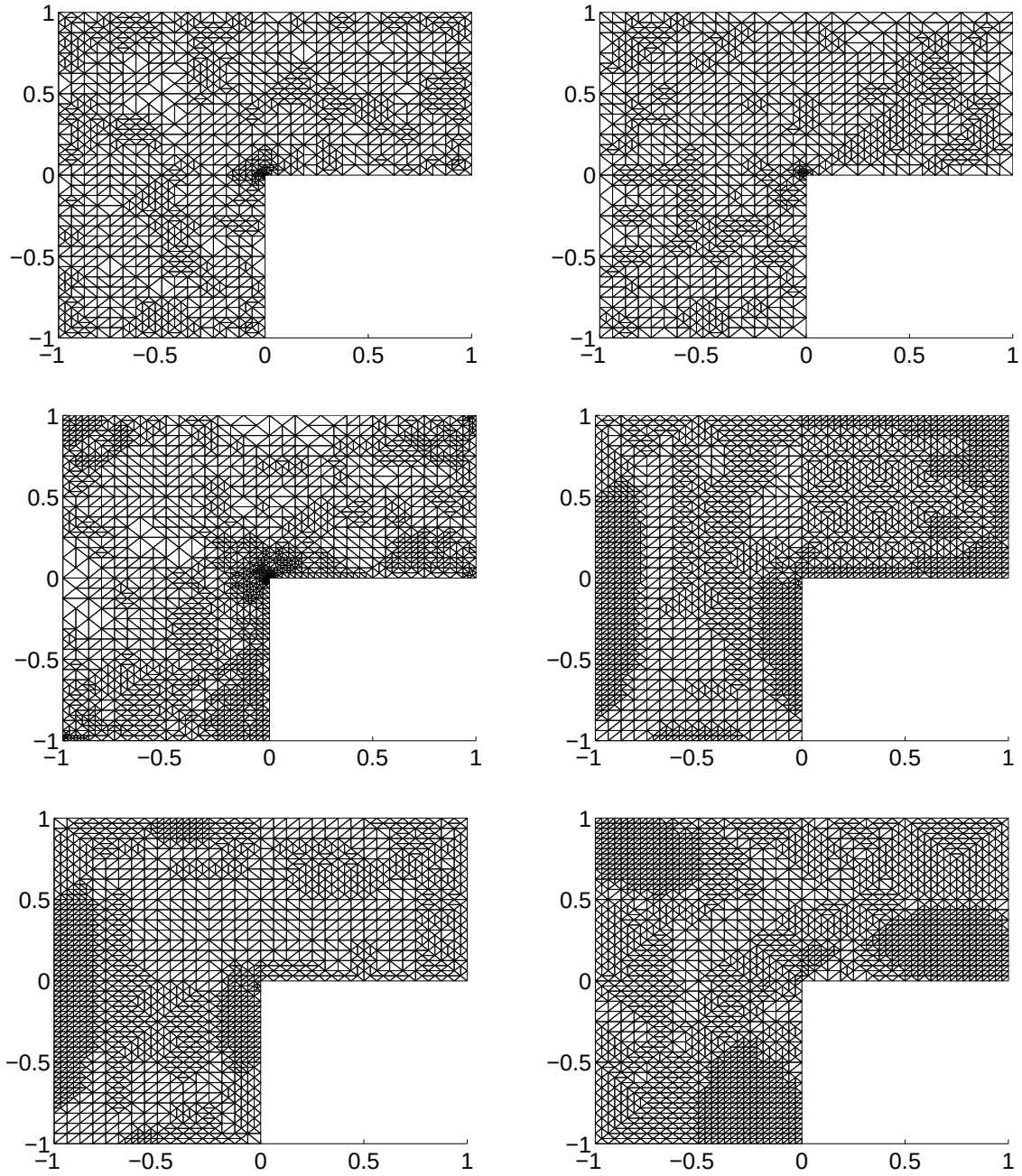


Abbildung 7.39: Vergleich der Gitter für verschiedene Fehlerschätzer für das Laplace Problem für das L-förmige Gebiet. Von links nach rechts: $\eta_\ell^{(PWR,1)}$, $\eta_\ell^{(PWR,2)}$ und $\eta_\ell^{(PWR,3)}$ sowie $\eta_\ell^{(PWR,Res1)}$ für das erste Zielfunktional $J^{(1)}$, $\eta_\ell^{(PWR,Res2)}$ für das zweite Zielfunktional $J^{(2)}$ und $\eta_\ell^{(PWR,Res3)}$ für das dritte Zielfunktional $J^{(3)}$.

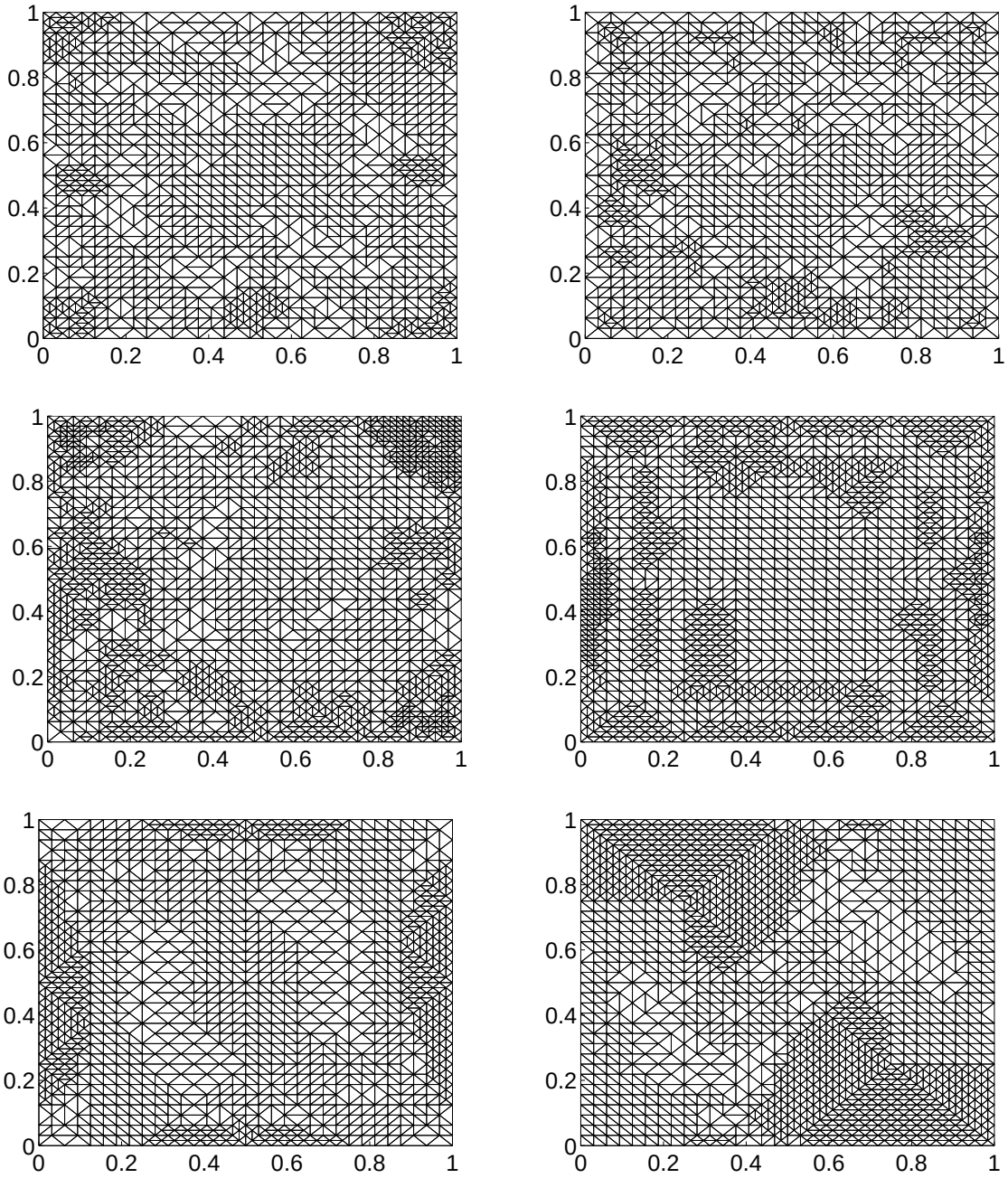


Abbildung 7.40: Vergleich der Gitter für verschiedene Fehlerschätzer für das Laplace Problem für das Einheitsquadrat. Von links nach rechts: $\eta_\ell^{(PWR,1)}$, $\eta_\ell^{(PWR,2)}$ und $\eta_\ell^{(PWR,3)}$ sowie $\eta_\ell^{(PWR,Res1)}$ für das erste Zielfunktional $J^{(1)}$, $\eta_\ell^{(PWR,Res2)}$ für das zweite Zielfunktional $J^{(2)}$ und $\eta_\ell^{(PWR,Res3)}$ für das dritte Zielfunktional $J^{(3)}$.

7.6 Auswertung der numerischen Testbeispiele

In den Grafiken 7.41-7.43 werden alle zuverlässigen und effizienten Fehlerschätzer abhängig von den Problemen aufgeführt.

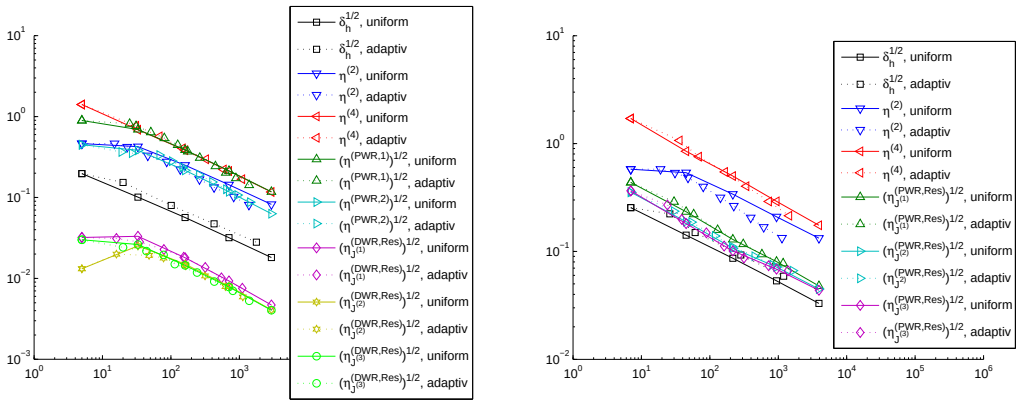


Abbildung 7.41: Effiziente und zuverlässige Fehlerschätzer für das Optimal Design Problem auf dem L-förmigen und dem Schlitzgebiet.

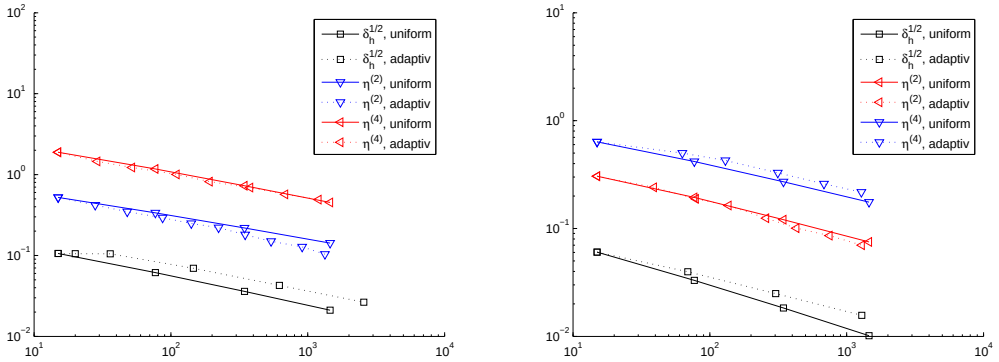


Abbildung 7.42: Effiziente und zuverlässige Fehlerschätzer für das 2−Well Benchmark Problem mit vorgegebenen Randdaten u_D und Funktion f_0, siehe Abschnitt 6.2.2, bzw. mit $u_D \equiv 0$ und $f_0 \equiv 1$.

Dabei erzielten der modifizierte Kantenfehlerschätzer $\eta_\ell^{(2)}$ sowie der Residualfehlerschätzer aus [23] die besten Ergebnisse. Für das Laplace Problem zeigen beide Fehlerschätzer eindeutig zuverlässiges und effizientes Verhalten. Bei dem 2−Well Benchmark Problem gilt für beide Fehlerschätzer zuverlässiges und effizientes Verhalten bei adaptiver Verfeinerung, bei uniformer Verfeinerung ist die Konvergenzrate des Fehlermaßes etwas zu stark. An dieser Stelle wären Untersuchungen mit mehr Freiheitsgraden nötig, diese Überprüfung jedoch ist mit den mir zur Verfügung stehenden Mitteln nicht möglich. Bei dem Optimal Design Problem auf dem Schlitzgebiet scheint die Konvergenzrate des modifizierten Fehlerschätzers bei der adaptiven Verfeinerung etwas zu stark zu sein, auch hier wären Untersuchungen mit mehr Freiheitsgraden wichtig, um zuverlässige Aussagen treffen zu können.

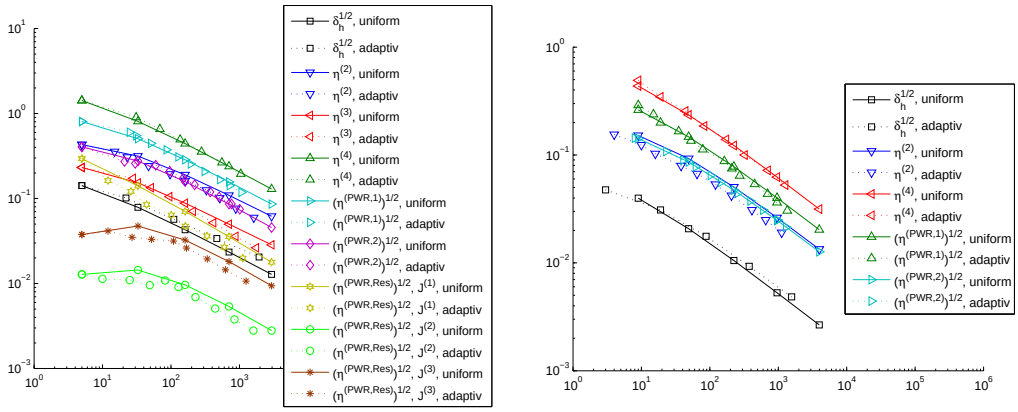


Abbildung 7.43: Effiziente und zuverlässige Fehlerschätzer für das lineare Laplace Problem auf dem L-förmigen Gebiet und dem Einheitsquadrat.

Der Glättungsfehlerschätzer $\eta_\ell^{(3)}$ zeigte nur für das Laplace Problem auf dem L-förmigen Gebiet zuverlässiges und effizientes Verhalten. Bei den anderen Beispielen führen die höheren Ordnungsterme aus Satz 3.5.1 zu einer Störung der Konvergenzrate. Der Kantenfehlerschätzer $\eta_\ell^{(1)}$ sowie der gemischte primale-duale Fehlerschätzer $\eta_\ell^{(5)}$ sind eindeutig nicht effizient.

Die dualen Fehlerschätzer aus dem DWR Ansatz besitzen nur für das Optimal Design Problem auf dem L-förmigen Gebiet die richtigen Konvergenzraten. Die ersten beiden primalen Fehlerschätzer $\eta_\ell^{(PWR,1)}$ und $\eta_\ell^{(PWR,2)}$ zeigten zuverlässiges und effizientes Verhalten für das Optimal Design Problem auf dem L-förmigen Gebiet sowie für das Laplace Problem. Die primalen Residualfehlerschätzer $\eta_\ell^{(PWR,Res)}$ wiederum besitzen für alle untersuchten Zielfunktionale bei dem Optimal Design Problem auf dem Schlitzgebiet sowie bei dem Laplace Problem auf dem L-förmigen Gebiet die richtige Konvergenzrate.

Anlage A

Optimalität des AFEM Algorithmus

In diesem Abschnitt wird die Optimalität des AFEM Algorithmus gezeigt, indem bewiesen wird, dass die Netzverfeinerung optimal ist, das heißt, dass die Anzahl der markierten Kanten, die zu einer Verfeinerung von $\mathcal{T}_0$ zu $\mathcal{T}_\ell$ über mehrere Verfeinerungslevel hinweg benötigt werden, durch die Kardinalität der Endtriangulierung beschränkt ist und andersherum.
Dies ist kein triviales Argument, da durch den Kantenabschluss (*Closure*) unter Umständen sehr viele weitere Kanten markiert werden müssen, um hängende Knoten zu vermeiden, siehe Abbildung A.1.

Die zweite Hauptaussage dieses Abschnittes bezieht sich auf die Überlagerung zweier Triangulierungen in der Art, dass die Kardinalität der Überlagerung durch die Kardinalität der einzelnen Triangulierungen beschränkt ist.

Damit werden die Ergebnisse von [9], [37], [38] u.a. von NVB-Verfeinerungen auf RGB-Verfeinerungen verallgemeinert.

Zuerst wird eine allgemeine Einführung zu Baumstrukturen gegeben, welche äquivalent zu Netzstrukturen bei RGB-Verfeinerungen benutzt werden können. Damit können die Sätze bzgl. RGB-Verfeinerungen bewiesen werden.

Danach wird die Überlagerung von Bäumen definiert und es werden verschiedene Algorithmen zur numerischen Umsetzung angegeben.

Unter diesen Voraussetzungen können nun die oben genannten Eigenschaften des AFEM Algorithmus bewiesen werden.

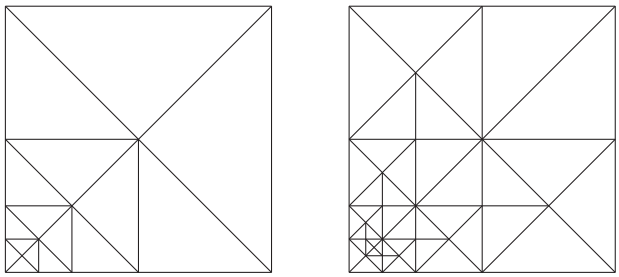


Abbildung A.1: Die rechte Triangulierung enthält 50 *Elemente und entstand durch die Verfeinerung einer Kante (die zweite Kante auf der Linie, die von links unten nach rechts oben verläuft) der linken Triangulierung mit nur* 18 *Elementen.*

A.1 Baumstrukturen aus der Grafentheorie

Die Übersicht über allgemeine Baumstrukturen wurde [30] entnommen. Ein Graf, bei dem je zwei Knoten eindeutig miteinander verbunden sind, heißt *Baum*. Ein Baum ist eine zusammenhängende Menge. Wird eine Kante entfernt, enstehen zwei Bäume und bilden einen *Wald*.

Jeder endliche Baum besitzt einen Knoten ohne Vorgänger, dieser nennt sich *Wurzel*. Ein *Parent* oder *Elter* eines Knotens ist direkt mit diesem Knoten (dem *Child* oder *Kind*) verbunden und näher an der Wurzel.

Jeder Knoten hat nur einen Parent-Knoten, kann jedoch keine oder mehrere Child-Knoten besitzen. Ein Knoten ohne Child-Knoten heißt *Blatt*, einer mit Child-Knoten *innerer Knoten*.
Ein *Vorgänger* eines Knotens ist ein anderer Knoten, der mit diesem nur in einer Richtung verbunden ist und näher an der Wurzel liegt. Ein Parent-Knoten ist daher ein Vorgänger. Ein *Nachfolger* ist ein Knoten, der ebenfalls mit diesem nur in eine Richtung verbunden ist, jedoch weiter von der Wurzel entfernt liegt. Child-Knoten sind demnach Nachfolger.

A.2 NVB-Verfeinerung

Bei NVB-Verfeinerungen (*Newest Vertex Bisection*) werden nach einer Verfeinerung eines Dreiecks die Referenzkanten der Child-Dreiecke dieses Dreiecks so gewählt, dass die Referenzkante gegenüber dem neuen Knoten liegt. Diese Wahl der Referenzkanten ist eindeutig. Markierte Dreiecke werden verfeinert, indem der neueste Knoten mit dem Mittelpunkt der Referenzkante verbunden wird.

Jedes Dreieck $T \in \mathcal{T}_0$ wird als Wurzel eines Baumes gewählt. Es gibt also so viele Bäume wie Dreiecke in der Anfangstriangulierung.
Die Verfeinerungen der Anfangstriangulierung werden alle in den Bäumen und damit in dem Wald $\mathcal{F}$ abgespeichert. Verschiedene Verfeinerungen können in verschiedenen Wäldern abgespeichert werden, diese werden in einem *Hauptwald* $\mathbb{F}$ abgespeichert.

Die *Generation* eines Knotens gen(T) ist die Anzahl Schritte, die man an dem Baum Richtung Wurzel entlanggehen muss, um diese zu erreichen. Child-Knoten einer Wurzel haben die Generation 1, Child-Knoten dieser die Generation 2.

In einer NVB-Verfeinerung müssen alle Knoten, die keine Wurzeln sind, einen Parent-Knoten haben, und alle inneren Knoten entweder zwei oder keine Child-Knoten besitzen.

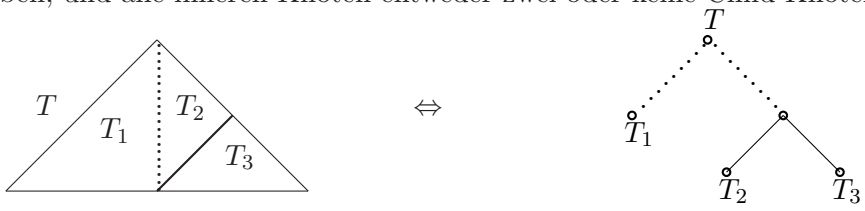
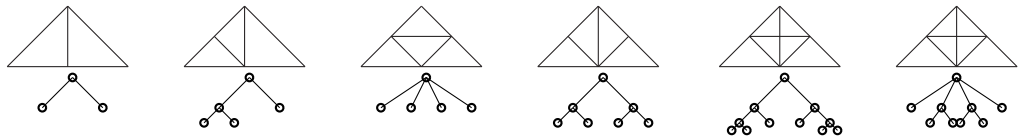


Abbildung A.2: 1-zu-1 - Beziehung zwischen Triangulierung und Baum bei der NVB-Verfeinerung.

A.3 RGB-Verfeinerung

Bei der RGB-Verfeinerung werden im Gegensatz zu der NVB-Verfeinerung nicht die Dreiecke, sondern die Kanten dieser markiert. Die Referenzkanten der Dreiecke werden durch eine Referenzkantenabbildung $E(T)$ definiert, die jedem Dreieck eindeutig eine Referenzkante zuordnet. Oft wird die längste Seite eines Dreiecks als Referenzkante gewählt.
Bei der RGB-Verfeinerung gibt es verschiedene Verfeinerungsstrategien. Dieses sind alle in Abbildung A.3 veranschaulicht. Diese Verfeinerungen sind nicht eindeutig, siehe *bisec5* und *bisec 5b*. Um trotzdem eine 1-zu-1 - Beziehung zwischen Triangulierung und Wald herstellen zu können, muss eine entsprechende Äquivalenzrelation eingeführt werden. Diese wird in Definition A.3.1 angegeben und danach weiter besprochen.



grün ($bisec1$)	$blau_l$ ($2 \times bisec1$)	*rot*	*bisec*3 ($3 \times bisec1$)	*bisec*5 ($5 \times bisec1$)	*bisec*5*b* ($rot + 2 \times bisec1$)

Abbildung A.3: Beziehungen zwischen Elementen der Triangulierung und den entsprechenden Bäumen. Die $blau_r$-Verfeinerung definiert sich analog zu $blau_l$.

Die Verfeinerungsstrategien $blau_l$, $blau_r$, *bisec*3, *bisec*5 und *bisec*5*b* können jeweils aus den Verfeinerungen *grün* und *rot* zusammengesetzt werden und werden daher im Folgenden nur in 2 bzw. 3 Verfeinerungsschritten erlaubt. Dies kann jedoch mittels einfacher Argumentation auf allgemeine Fälle übertragen werden.

Definition A.3.1. *Eine Verfeinerung des Elementes T über eine rot-Verfeinerung und eine grün-Verfeinerung angewendet auf die zwei inneren Dreiecke (bisec*5*b) ist äquivalent zu einer Verfeinerung durch drei hintereinander folgende grün-Verfeinerungen, siehe Abbildung* A.4*.*

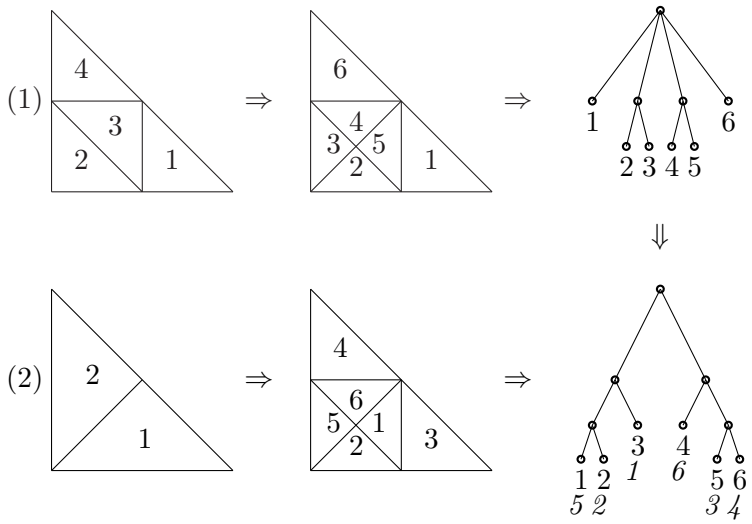


Abbildung A.4: Visualisierung der Äquivalenzrelation aus Definition A.3.1*. Die Triangulierung erhält man entweder durch rot gefolgt von zwei grün-Verfeinerungen (1), genannt bisec*5*b, oder durch insgesamt 5 grün-Verfeinerungen (2), genannt bisec*5*. Die Nummerierung folgt dem Algorithmus* A.3.5*. Der zweite Baum wird als Repräsentant der Äquivalenzrelation gewählt. Der obere Baum wird durch den Repräsentanten ersetzt. Die kursiven Nummern im zweiten Baum bezeichnen die Knoten aus dem oberen Baum. Wird also der obere Baum durch den unteren ersetzt, muss z.B. ein eventueller Unterbaum am Knoten rechts außen (nicht eingezeichnet) nun an den vierten Knoten des neuen Baums gehängt werden.*

Definition A.3.2. *Ein Baum heißt regulär, falls er in einer 1-zu-1 - Beziehung mit dem entsprechenden Teil der Triangulierung steht und die Triangulierung selbst regulär ist. Ist weiterhin die Triangulierung symmetrisch, so muss diese Symmetrie in gewissem Grade auch in dem Baum ersichtlich sein.*
Ein Wald heißt regulär, falls er in einer 1-zu-1 - Beziehung mit der Triangulierung steht und alle Bäume des Waldes regulär sind.

Bemerkung A.3.3. *Die 1-zu-1 - Beziehung erhält man unter Benutzung der Äquivalenzrelation aus Definition* A.3.1*, indem die bisec*5*b-Unterbäume durch den Repräsentanten bisec*5 *wie in Abbildung* A.4 *ausgetauscht werden.*

Notation A.3.4. *Die Kardinalität einer Triangulierung wird mit*

$$|\mathcal{T}| := \mathrm{card}(\mathcal{T})$$

angegeben.

Algorithmus A.3.5 (Nummerierung)**.** *Die Nummerierung der Elemente einer regulären Triangulierung hängt von den früheren Level, d.h. von allen Parent-Child-Beziehungen der Bäume, ab.*

i. Die Triangulation $\mathcal{T}_0$ besteht aus n Dreiecken, jedes Dreieck K_j aus $\mathcal{T}_0$ gehört zu einer Wurzel. Die Menge aller Bäume entspricht dem Wald $\mathcal{F}$.

ii. Jedes Element K_j aus $\mathcal{T}_0$ besitzt eine Referenzkante $E = E(K_j)$, welche zum Beispiel die längste Kante des Dreiecks ist. Die Knoten $A_j, B_j \in \mathcal{N}_0$ sind die Endknoten der Referenzkante wie in Abbildung A.5 *angegeben. Nachfolgend steht A, B für A_j, B_j.*

iii. Jedes Child-Element wird abhängig von dem Parent-Element, der Referenzkante sowie den Abständen vom Mittelpunkt der Referenzkante zu A und B nummeriert. Sei i die aktuelle Nummer des Parent-Dreiecks $T \in \mathcal{T}_\ell$, im Folgenden bezeichnet mit T_i.

- *Wird das Dreieck T_i nicht verfeinert, behält es vorerst seine Nummer.*
- *Wird das Dreieck T_i grün-verfeinert, dann werden die beiden Child-Elemente mit $i.1$ und $i.2$ nummeriert, wobei Dreieck $T_{i.1}$ vom Mittelpunkt der Referenzkante aus gesehen links von $T_{i.2}$ liegt, wie in dem ersten Bild der Abbildung* A.6 *visualisiert.*
- *Wird auf T_i eine rot-Verfeinerung angewendet, wird der Abstand des Mittelpunktes $mid(E_i)$ der Referenzkante von T_i zu A, B betrachtet. Eine Kante jedes Dreiecks $T_{i.1}$ und $T_{i.4}$ ist eine Child-Kante der Referenzkante E_i von T_i.*
  Ist der Abstand des Mittelpunktes $mid(E_i)$ der Referenzkante von T_i zu A kleiner oder gleich dem Abstand zu B, dann teilt das Dreieck $T_{i.3}$ einen Knoten mit der Referenzkante, sonst gilt dies mit $T_{i.2}$. Eine Visualisierung ist in Abbildung A.6 *gegeben.*

iv. Falls die Baumstruktur Unterbäume des Typs bisec5b enthält, müssen diese Unterbäume (wie der erste Baum in Abbildung A.4*) durch die äquivalenten Unterbäume bisec5 ersetzt werden, siehe Definition* A.3.1*. Eventuelle Child-Bäume werden übernommen.*

v. Die korrekte Nummerierung der Triangulierung $\mathcal{T}_{\ell+1}$ erhält man durch eine Neunummerierung der neuen Unterdreiecke und Verschiebung der Nummern der anderen, nicht verfeinerten Dreiecke.
Beispiel: $\{1, 2.1, 2.2, 3, \ldots\} \Rightarrow \{1, 2, 3, 4, \ldots, |\mathcal{T}_{\ell+1}|\}$.

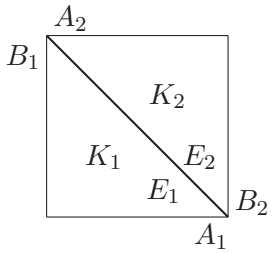


Abbildung A.5: Triangulierung $\mathcal{T}_0$ mit den Dreiecken, die zu den Wurzeln $K_j \in \mathcal{T}_0$ der Bäume gehören, mit Referenzkante $E = E(K_j)$ und Endpunkten $A = A_j, B = B_j$ von E_j.

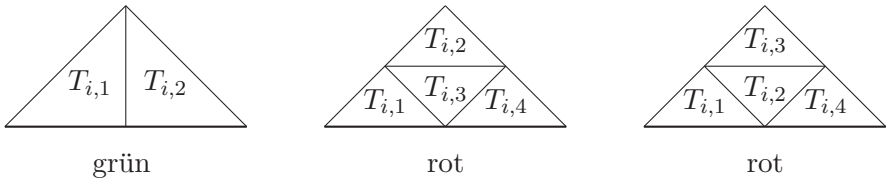


Abbildung A.6: Von links nach rechts: 1) grün-Verfeinerung eines Dreiecks T_i; 2) rot-Verfeinerung eines Dreiecks T_i, wenn der Mittelpunkt der Referenzkante des Dreiecks näher an A liegt als an B oder der Abstand gleich ist; 3) andersherum. Hier sind A und B Endpunkte der Referenzkante des Dreiecks $K_j \in \mathcal{T}_0$ mit $T_i \subseteq K_j$.

A.4 Überlagerung zweier Bäume

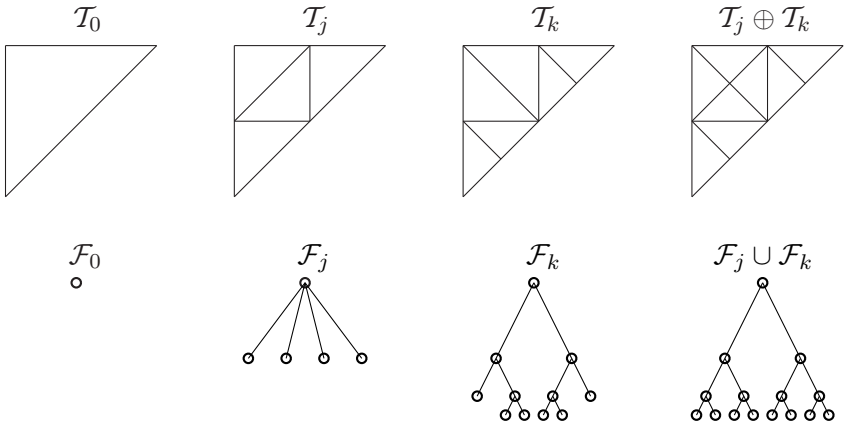


Abbildung A.7: Veranschaulichung einer Überlagerung zweier Triangulierungen $\mathcal{T}_j$ und $\mathcal{T}_k$, bzw. der entsprechenden Bäume $\mathcal{F}_j$ und $\mathcal{F}_k$.

Eine Überlagerung zweier Bäume $\mathcal{F}_j \cup \mathcal{F}_k$ ist der gröbste Baum, welcher (bis auf Äquivalenzrelationen) die gesamte Struktur beider Bäume $\mathcal{F}_j, \mathcal{F}_k$ enthält.

Definition A.4.1. (Überlagerung zweier Bäume).

$$\mathcal{T}_j \oplus \mathcal{T}_k := \mathcal{T}(\mathcal{F}_j \cup \mathcal{F}_k)$$

definiert die Überlagerung der Bäume zweier Triangulierungen $\mathcal{T}_j$ und $\mathcal{T}_k$.

Die Überlagerung zweier Triangulierungen kann mit oder ohne Benutzung der dazugehörigen Wälder erfolgen. Beide Varianten werden unten beschrieben. Die Überlagerung von Triangulierungen wird in Abbildung A.8 beschrieben.

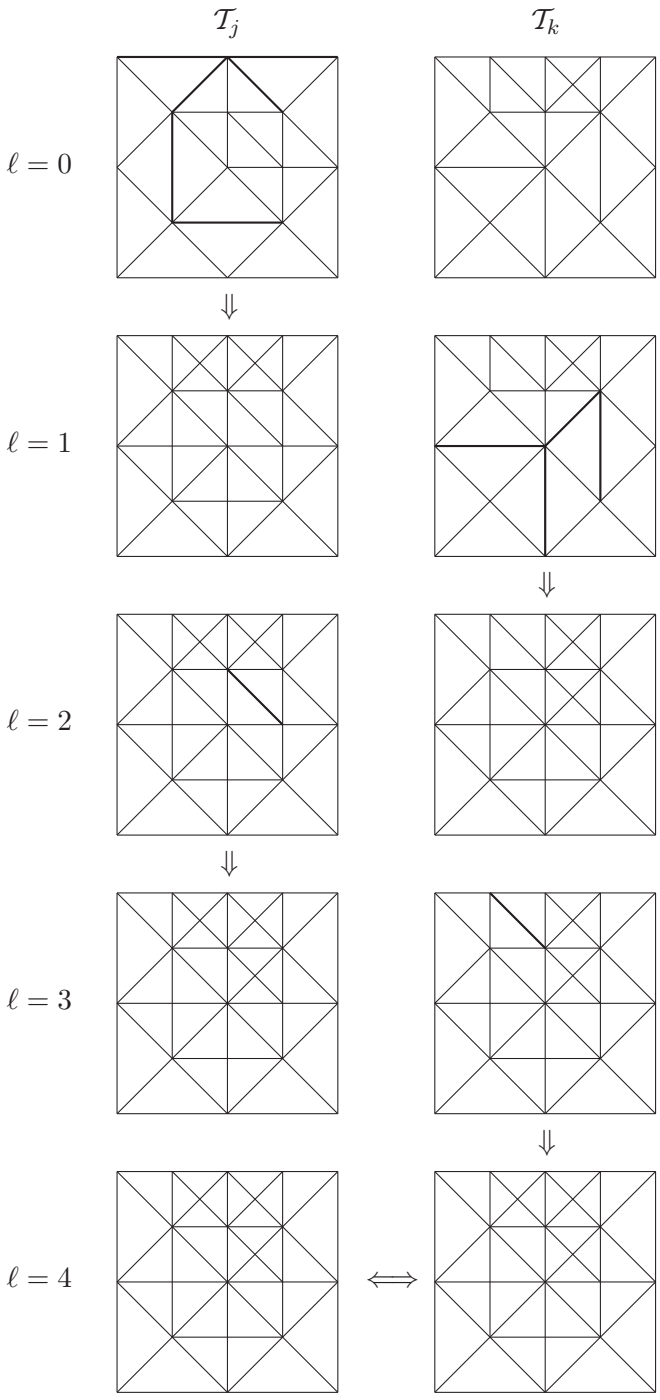


Abbildung A.8: Visualisierung des Algorithmus A.4.2. *Die größten Elemente (bzw. Kanten), welche nicht in der anderen Triangulierung auftreten, werden verfeinert. Die Überlagerung, welche man im letzten Schritt erhält, ist regulär und hat minimale Kardinalität.*

Algorithmus A.4.2. (Überlagerung von Bäumen).
INPUT: *Reguläre Triangulierungen* $\mathcal{T}_j = \mathcal{T}_j^{(0)}(\Omega)$ *und* $\mathcal{T}_k = \mathcal{T}_k^{(0)}(\Omega)$ *bestehend aus Dreiecken,* $\mathcal{E}(\mathcal{T})$ *bezeichnet die Menge aller Kanten der Triangulierung und* $\mathcal{E}(T)$ *die Menge aller Kanten von* T. $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ *bezeichnet die Menge aller auftretenden Flächen* $|T|$ *für* $T \in \mathcal{T}$.
LOOP: $\ell := 0,\ \mathcal{M} = \emptyset,\ \mathcal{N} = \emptyset$
`while` $\mathcal{T}_j^{(\ell)} \neq \mathcal{T}_j^{(\ell)}$ `do`

(i) `if` $\max \mathcal{A}(\mathcal{T}_k^{(\ell)}) \leq \max \mathcal{A}(\mathcal{T}_j^{(\ell)})$
$\mathcal{T} := \mathcal{T}_j^{(\ell)}$ *und* $\mathcal{T}' := \mathcal{T}_k^{(\ell)}$
`else`
$\mathcal{T} := \mathcal{T}_k^{(\ell)}$ *und* $\mathcal{T}' := \mathcal{T}_j^{(\ell)}$
`end`.

(ii) *Für alle* $T \in \mathcal{T}$ *mit* $|T| = \max \mathcal{A}(\mathcal{T})$: *falls kein* $K \in \mathcal{T}'$ *mit* $T = K$ *existiert, dann* $\mathcal{N} = \mathcal{N} \cup \{T\}$.

(iii) *Falls* $\mathcal{N} = \emptyset$, *entferne* $\max \mathcal{A}(\mathcal{T})$ *von der Menge der auftretenden Flächen der Triangulierung* $\mathcal{T}$ *und gehe zu* (i).

(iv) *Für alle* $T \in \mathcal{N}$: *für alle* $E \in \mathcal{E}(T)$: *falls kein* $F \in \mathcal{E}(\mathcal{T}')$ *mit* $E = F$ *existiert, dann* $\mathcal{M} = \mathcal{M} \cup \{E\}$.

(v) *Benutze den Closure-Algorithmus* 2.3.2 *für* $\mathcal{M}$ *um die Menge der markierten Kanten* $\hat{\mathcal{M}}$ *zu erhalten und verfeinere durch Halbierung aller markierten Kanten.*

(vi) *Aktualisiere* $\mathcal{A}(\mathcal{T}_j^{(\ell)})$ *und* $\mathcal{A}(\mathcal{T}_k^{(\ell)})$, *z.B. für die erste Menge* $\mathcal{A}(\mathcal{T}_j^{(\ell)}) = \mathcal{A}(\mathcal{T}_j^{(\ell)}) \setminus \max \mathcal{A}(\mathcal{T}_j^{(\ell)})$, *setze* $\ell = \ell + 1$ *und* $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \emptyset$.

`end while`
OUTPUT: *Eindeutige Überlagerung* $\mathcal{T}_1 := \mathcal{T}_j^{(\ell+1)} = \mathcal{T}_k^{(\ell+1)} = \mathcal{T}_j \oplus \mathcal{T}_k$ *mit minimaler Kardinalität.*

Algorithmus A.4.3. (Überlagerung von Bäumen).
INPUT: *Bäume* $\mathcal{F}_j$, $\mathcal{F}_k$ *der zugehörigen Triangulierungen* $\mathcal{T}_j = \mathcal{T}(\mathcal{F}_j)$, $\mathcal{T}_k = \mathcal{T}(\mathcal{F}_k)$ *und der zugehörigen Mengen innerer Baumknoten* $\mathcal{N}_j$, $\mathcal{N}_k$.
LOOP: $\ell := 0,\ \mathcal{N}^{(0)} := \mathcal{N} := \mathcal{N}_j \cup \mathcal{N}_k$
`while` $\mathcal{N}^{(\ell)} \neq \emptyset$ `do`

(i) *Für einen Knoten* $z \in \mathcal{N}^{(\ell)}$ *seien* $\mathcal{M}_j(z)$ *und* $\mathcal{M}_k(z)$ *die Mengen der Child-Knoten der ersten Generation von* z *aus* $\mathcal{T}_j$ *bzw.* $\mathcal{T}_k$ *(eventuell leer).*

(ii) *Definiere* $\mathcal{M}_z$ *als Menge aller Child-Knoten der neuen Überlagerung von Knoten* z:

(iia) *Falls (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) die Menge* $\mathcal{M}_j(z)$ *leer ist, definiere* $\mathcal{M}_z := \mathcal{M}_k(z)$.

(iib) *Falls* $\mathcal{M}_j(z)$ *gleich* $\mathcal{M}_k(z)$, *setze* $\mathcal{M}_z := \mathcal{M}_k(z)$.

(iic) *Falls* $\mathcal{M}_j(z)$ *und* $\mathcal{M}_k(z)$ *unterschiedlich und nicht leer sind, d.h. wenn eine Menge vier Child-Knoten enthält (von der rot-Verfeinerung) und eine Menge zwei Child-Knoten enthält (von der grün-Verfeinerung), dann werden die Anhänge wie in Abbildung* A.9 *überlagert.*

(iii) Setze $\mathcal{N}^{(\ell)} := \mathcal{N}^{(\ell)} \backslash z$.

`end while`
Wende die Äquivalenzrelation von dem untersten bis zum obersten Level an.
OUTPUT: *Überlagerung* $\mathcal{F}_j \cup \mathcal{F}_k$ *definiert durch die Abbildung* $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_z\}_{z \in \mathcal{N}}$, *welche eindeutig die Struktur der Überlagerung an jedem Knoten* $z \in \mathcal{N}^{(0)}$ *definiert.*

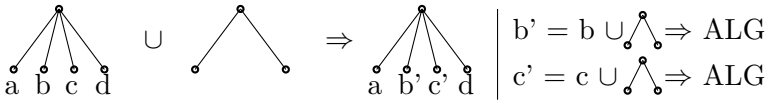


Abbildung A.9: Überlagerung einer rot- und grün-Verfeinerung. Die Anhänge a und d werden übernommen. Die Unterbäume b und c werden wieder mit der grün-Verfeinerung überlagert. Die entstehenden bisec5b-Bäume werden zu diesem Zeitpunkt nicht mit dem Repräsentanten bisec5 der Äquivalenzklasse ersetzt, die Äquivalenzrelation wird erst am Ende des Algorithmus behandelt.

Bemerkung A.4.4. *Der Algorithmus* A.4.3 *ergibt einen regulären Wald, falls* $\mathcal{F}_j$ *und* $\mathcal{F}_k$ *regulär sind.*

Während der Implementierung des Algorithmus muss die chronologische Reihenfolge der Knoten für die Überlagerung beachtet werden, so dass keine inneren Knoten übersehen werden. Der Nummerierungsalgorithmus wurde in Abschnitt A.3.5 gegeben.

Algorithmus A.4.5. (Verfeinerte Triangulierung nach der Überlagerung der Bäume).
INPUT: *Triangulierungen* $\mathcal{T}_j = \mathcal{T}(\mathcal{F}_j)$ *und* $\mathcal{T}_k = \mathcal{T}(\mathcal{F}_k)$.
DO: *Erstelle* $\hat{\mathcal{F}}_1 = \mathcal{F}_j \cup \mathcal{F}_k$ *nach einer Variation von Algorithmus* A.4.3, *so dass die Äquivalenzklasse am Ende nur dann auf Unterbäume angewendet wird, wenn der entsprechende Knoten in* $\mathcal{F}_j$ *nur zwei Child-Knoten hat. Damit ist der Wald* $\mathcal{F}_j$ *komplett in* $\hat{\mathcal{F}}_1$ *enthalten.*
LOOP: *Setze* $\mathcal{N} = \{z \in \mathcal{F}_j \mid z \text{ ist Blattknoten }\}$. *Setze* $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_j$ *und* $\mathcal{F}_1^* = \mathcal{F}_j$.
`while` $\mathcal{N} \neq \emptyset$ `do` *für alle* $z \in \mathcal{N}$*:*
Falls der Knoten z zwei oder vier Child-Knoten in $\hat{\mathcal{F}}_1$ *besitzt, verfeinere das entsprechende Dreieck* $T \in \mathcal{T}_1$ *entsprechend mit einer grün- oder rot-Verfeinerung und aktualisiere den Wald* $\mathcal{F}_1^*$. *Die neuen Child-Knoten werden in die Menge* $\mathcal{N}$ *aufgenommen.*
`end while`
OUTPUT: *Überlagerung* $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_j \oplus \mathcal{T}_k = \mathcal{T}(\mathcal{F}_1^*) = \mathcal{T}(\hat{\mathcal{F}}_1)$.

Algorithmus A.4.6. (Entwicklung eines Baumes für eine gegebene Triangulierung).
INPUT: *Triangulierung* $\mathcal{T}$ *sowie Anfangstriangulierung* $\mathcal{T}_0 =: \mathcal{T}^{(0)}$. $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ *sei die Menge aller möglichen auftretenden Winkel, die bei einer Verfeinerung der Dreiecke auftauchen können. Die Winkel einer Triangulierung eines Referenzdreiecks* T_{ref} *zum Beispiel sind* $\alpha \in \{0, 45, 90, 135, 180\}$, *soweit die Winkelbedingung 2.1 erfüllt ist.* α *bezeichne den Winkel aus Abbildung* A.10.
DO: *Jedes Dreieck* $K \in \mathcal{T}^{(0)}$ *steht in Beziehung zu einer Wurzel* $z \in \mathcal{F}$, *daher entspricht die Anzahl der Bäume* $\mathcal{F}_K$ *der Anzahl der Dreiecke K der ursprünglichen Triangulierung.*

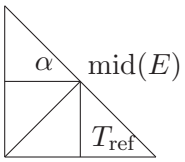


Abbildung A.10: Mögliche Winkel für T_{ref}.

Führe **LOOP** *für jedes dieser groben Dreiecke aus, wobei $\mathcal{T}_K$ die Teiltriangulierung des Dreiecks K bezeichnet.*
LOOP: $\ell = 0$.
`while` $\ell < L+1$, `do` *für alle $T \in \mathcal{T}_K^{(\ell)} \backslash \mathcal{T}_K$, d.h. alle Dreiecke in $\mathcal{T}_K^{(\ell)}$, welche in der Triangulierung $\mathcal{T}_K$ verfeinert wurden:*

- *E bezeichne die Referenzkante von T und mid(E) den Mittelpunkt von E.*
- *Falls Kanten $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{E}(\mathcal{T})$ existieren mit $F = F_1 \cup \cdots \cup F_n$, wobei F die Kante ist, welche von mid(E) aus in Richtung des Knotens $z \in T$ gegenüber von mid(E) geht, d.h. falls der Winkel α zwischen F und E wie in Abbildung* A.10 *eingezeichnet dem zweiten Winkel in $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ entspricht (d.h.* 45 *in T_{ref}), dann wird T grün-verfeinert und der entsprechende Knoten $z \in \mathcal{F}_K^{(\ell)}$ erhält zwei Child-Knoten.*
- *Falls keine solche Kante existiert, dann wird T rot-verfeinert und der zugehörige Knoten $z \in \mathcal{F}_K^{(\ell)}$ erhält vier Child-Knoten.*

Falls $\mathcal{T}_K^{(\ell)} \neq \mathcal{T}_K$, definiere $L := \ell + 1$, sonst $L := \ell$. Setze $\ell = \ell + 1$.
`end while`
OUTPUT: *Wald $\mathcal{F}$ als Menge der Bäume $\mathcal{F}_K^{(L+1)}$.*

Lemma A.4.7. (Überlagerung zweier Triangulierungen).
Für konforme (nicht notwendigerweise reguläre) Triangulierungen $\mathcal{T}_j$, $\mathcal{T}_k$, welche Verfeinerungen von $\mathcal{T}_0$ darstellen, ist die Überlagerung $\mathcal{T}_1 := \mathcal{T}_j \oplus \mathcal{T}_k$ konform und erfüllt

$$|\mathcal{T}_1| \leq c(|\mathcal{T}_j| + |\mathcal{T}_k|) - |\mathcal{T}_0|, \tag{A.1}$$

mit $c \in (1, 4/3)$.

Bemerkung A.4.8. *Das Interval, welches c beschränkt, ist nicht optimal gewählt. c könnte auch im schlechtesten Fall kleiner als $4/3$ sein, siehe Lemma* A.4.9.

Beweis des Lemmas A.4.7.
Für den Beweis wird die Regularität der Triangulierungen vernachlässigt. Daher stellt die Zahl $4/3$ nur eine obere Schranke für die Konstante c dar. Wenn die Regularität jedoch betrachtet wird, wird die obere Schranke nicht überschritten. In diesem Beweis wird der schlechteste Fall konstruiert, welcher n Überlagerungen von *rot*- und *grün*-Verfeinerungen enthält.

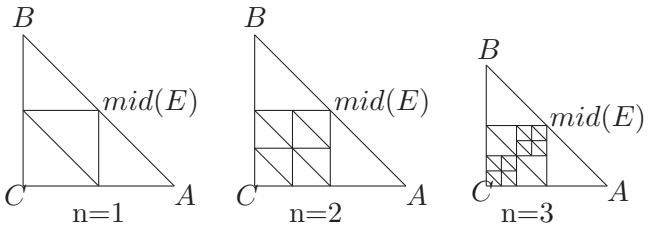


Abbildung A.11: Irreguläre Triangulierung für den schlechtesten Fall aus dem Beweis in Lemma A.4.7.

Wenn eine Triangulierung einmal *rot*-verfeinert ($\mathcal{T}_j$) und einmal *grün*-verfeinert ($\mathcal{T}_k$) wird, ändern sich in der Baumstruktur nur die Nachfolger der beiden inneren Child-Knoten, siehe Abbildung A.4). Durch die Vernachlässigung der Regularität tritt der schlechteste Fall auf, wenn viele (bzw. unendlich viele) *rot*-Verfeinerungen entlang der Hauptdiagonalen des Dreiecks halbiert werden, welche als Linie von C zum Mittelpunkt $mid(E)$ der Kante $E = \overline{AB}$ bezeichnet wird. Dies geschieht durch Überlagerung mit einem *grün*-verfeinerten Dreieck. Daher wird eine unendliche Folge von *rot*-Verfeinerungen entlang der Hauptdiagonale betrachtet. Die Verfeinerungen werden jeweils nur an die Child-Knoten weitergegeben, welche ebenfalls auf der Hauptdiagonalen liegen, siehe Abbildung A.11.
Für eine *rot*-Verfeinerung werden durch die Überlagerung mit einer *grün*-Verfeinerung daher zwei Elemente halbiert. Wurden entlang der Hauptdiagonalen $\overline{CE}$ zwei *rot*-Verfeinerungen durchgeführt, werden nun bei der Überlagerung vier Elemente halbiert. Für n *rot*-Verfeinerungen gilt dann, siehe auch Abbildung A.12:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{T}_j^n| &= \sum_{m=0}^{n-1} 2^{m+1} + 2^n = 2\cdot(2^n-1) + 2^n = 3\cdot 2^n - 2,\\
|\mathcal{T}_k| &= 2,\\
|\mathcal{T}_0| &= 1,\\
|\mathcal{T}_1^n| &= |\mathcal{T}_j^n| + 2^n = 2^{n+2} - 2,
\end{aligned}$$

und für

$$|\mathcal{T}_1^n| = C^{(n)}(|\mathcal{T}_j^n| + |\mathcal{T}_k|) - |\mathcal{T}_0| \leq C(|\mathcal{T}_j^n| + |\mathcal{T}_k|) - |\mathcal{T}_0|$$

erhält man

$$C^{(n)} = \frac{|\mathcal{T}_1^n| + |\mathcal{T}_0|}{|\mathcal{T}_j^n| + |\mathcal{T}_k|} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3\cdot 2^n} \nearrow \frac{4}{3}.$$

Daher ist $C^{(n)}$ beschränkt durch 4/3 und konvergiert gegen diesen Grenzwert. □

Lemma A.4.9. *Seien $\mathcal{T}_j$, $\mathcal{T}_k$ konforme Triangulierungen, dann ist die Überlagerung $\mathcal{T}_1 := \mathcal{T}_j \oplus \mathcal{T}_k$ ebenfalls konform und erfüllt*

$$|\mathcal{T}_1| \leq \frac{19}{16}(|\mathcal{T}_j| + |\mathcal{T}_k|) - |\mathcal{T}_0|. \tag{A.2}$$

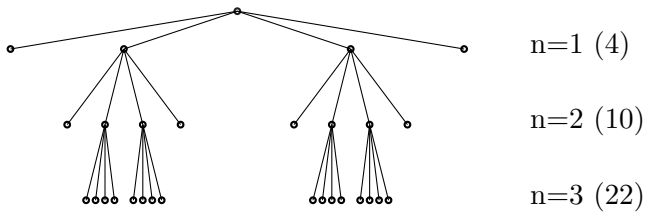


Abbildung A.12: Visualisierung des Beweises von Lemma A.4.7*: Baum der nichtregulären Triangulierung $\mathcal{T}_j = \mathcal{T}_j^n$ für die ersten drei Level, wie in Abbildung* A.11 *dargestellt, wobei die Menge aller Knoten eines Levels aus allen Knoten der entsprechenden Höhe sowie aus allen Blättern darüber besteht.*

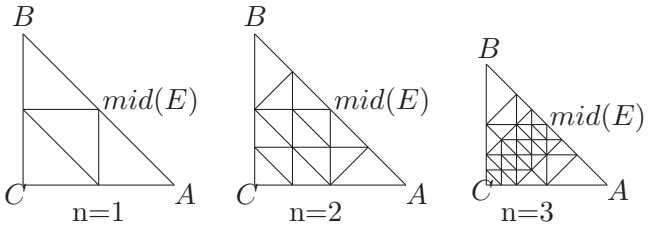


Abbildung A.13: Reguläre Triangulierung für den schlechtesten Fall in dem Beweis des Lemmas A.4.9*.*

Beweisskizze.
Dieser Beweis folgt den Hauptargumenten aus dem Beweis des Lemmas A.4.7, wobei nun reguläre Triangulierungen betrachtet werden. Der schlechteste Fall kann wie zuvor konstruiert werden, nur muss nun beachtet werden, dass bei jedem zusätzlichen Level der *rot*-Verfeinerungen entlang der Hauptdiagonalen $\overline{CE}$ der Effekt der Überlagerung mit einem *grün*-verfeinerten Dreieck abnimmt, da die Regularität nun nicht mehr verletzt werden darf. Wird ein Dreieck nun zweimal hintereinander *rot*-verfeinert, müssen einige *grün*-Verfeinerungen angewendet werden, damit keine hängenden Knoten entstehen, siehe Abbildung A.13.

Nun erhält man für den schlechtesten Fall:

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_j^n| &= (3 \cdot 2^n - 2) + 2 \left(\sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{m} 2^k \right), \\ |\mathcal{T}_k| &= 2, \\ |\mathcal{T}_0| &= 1, \\ |\mathcal{T}_1^n| &= |\mathcal{T}_j^n| + 2^n. \end{aligned}$$

Der erste Term in Klammern in $|\mathcal{T}_j^n|$ ist die Anzahl der Dreiecke, welche nur durch die *rot*-Verfeinerungen entstehen. Diese Formel wurde bereits in Lemma A.4.7 bewiesen. Der zweite Term spiegelt die notwendigen *grün*-Verfeinerungen wieder, dabei wird jedes Dreieck in drei Teildreiecke zerlegt, d.h. zusätzliche Dreiecke entstehen, siehe Abbildung A.13. Die Symmetrie des zweiten Terms in Klammern, das heißt die Symmetrie der zwei Summen, erklärt sich durch Betrachtung der Triangulierungen.

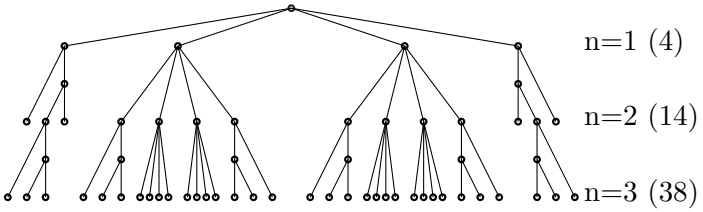


Abbildung A.14: Visualisierung des Beweises von Lemma A.4.9*: Regulärer Baum $\mathcal{T}_j = \mathcal{T}_j^n$ für die ersten drei Level, wobei die Menge der Knoten eines Levels aus den Knoten der entsprechenden Höhe sowie allen Blättern darüber besteht.*

Die Summen können weiter umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
3\cdot 2^n - 2 + 2\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{m} 2^k &= 3\cdot 2^n - 2 + 4\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} 2^k \\
&= 3\cdot 2^n - 2 + 4\sum_{m=1}^{n-1}(2^m - 1) \\
&= 3\cdot 2^n - 2 + 8\sum_{m=0}^{n-2} 2^m - 4(n-1) \\
&= 3\cdot 2^n - 2 + 8(2^{n-1} - 1) - 4(n-1) \\
&= 7\cdot 2^n - 4n - 6,
\end{aligned}$$

dies führt auf

$$\begin{aligned}
|\mathcal{T}_j^n| &= 7\cdot 2^n - 4n - 6, \\
|\mathcal{T}_k| &= 2, \\
|\mathcal{T}_0| &= 1, \\
|\mathcal{T}_1^n| &= 8\cdot 2^n - 4n - 6,
\end{aligned}$$

und für

$$|\mathcal{T}_1^n| = C^{(n)}(|\mathcal{T}_j^n| + |\mathcal{T}_k|) - |\mathcal{T}_0| \leq C(|\mathcal{T}_j^n| + |\mathcal{T}_k|) - |\mathcal{T}_0|$$

erhält man mit einfachen Umformungen

$$C^{(n)} \leq \frac{19}{16} = C^{(2)} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 1.$$

□

A.5 Optimale Netzverfeinerung

In diesem Abschnitt wird beweisen, dass

$$|\mathcal{T}_L| - |\mathcal{T}_0| \lesssim |M_0^L| \lesssim |\mathcal{T}_L| - |\mathcal{T}_0|$$

gilt. Diese Aussage wurde bereits von [9] für NVB-Verfeinerungen bewiesen. Für die RGB-Verfeinerung werden ähnliche Argumente benutzt, während statt der Kanten Elemente markiert werden. Durch die Beschränkung der Anzahl merkierter Kanten ist das Erreichen optimaler Markierungen bzw. optimaler Gitter gesichert.

Definition A.5.1. *Sei $\mathcal{M}_\ell$ die Menge aller markierten Kanten für eine Verfeinerung von $\mathcal{T}_\ell$. Analog enthalte $\mathcal{M}_a^b$ alle Dreiecke aus $\mathcal{T}_a$ welche verfeinert wurden, um zu $\mathcal{T}_b$ zu gelangen, also*

$$M_a^b = \sum_{i=0}^{b-a} M_{a+i}^{a+i+1} = M_0^1 + \ldots + M_{b-1}^b.$$

Bemerkung A.5.2. *Da die Abhängigkeit der Verfeinerung eines Dreiecks von der Anzahl der markierten Kanten eindeutig definiert ist, gilt*

$$|\mathcal{M}_\ell(T)| = |\mathcal{T}_{\ell+1}(T)| - 1 \leq 3, \tag{A.3}$$

wobei T ein Element der Triangulierung $\mathcal{T}_\ell$ ist und $\mathcal{T}_{\ell+1}(T)$ die Elemente enthält, die nach der Verfeinerung dieses Elements entstanden sind.

Lemma A.5.3. *Die Anzahl der markierten Kanten (ohne Closure), die benötigt werden, um T_ℓ aus T_0 zu erhalten, ist durch die Differenz der Elemente der Anfangs- und Endtriangulierung beschränkt,*

$$|M_0^L| \lesssim |\mathcal{T}_L| - |\mathcal{T}_0|.$$

Beweis.
Nach Bemerkung A.5.2 gilt

$$|M_\ell^{\ell+1}(T)| \leq |\mathcal{T}_{\ell+1}(T)| - 1.$$

Daraus folgt

$$|M_\ell^{\ell+1}| = \sum_{T\in\mathcal{T}_\ell} |M_\ell^{\ell+1}| \leq |\mathcal{T}_{\ell+1}| - |\mathcal{T}_\ell|.$$

Daher gilt

$$|M_0^L| = \sum_{\ell=0}^{L-1} |M_\ell| = \sum_{\ell=0}^{L-1} |\mathcal{T}_{\ell+1}| - |\mathcal{T}_\ell| = |\mathcal{T}_L| - |\mathcal{T}_0|.$$

□

Lemma A.5.4. *Sei $\{\mathcal{T}_\ell\}_{\ell=0}^L$ eine Folge regulärer Triangulierungen, welche durch RGB-Verfeinerungen und unter Anwendung des Closure Algorithmus* 2.6.1 *entstanden sind. Dann existiert eine Konstante $C_1 > 0$, welche nur von $\mathcal{T}_0$ abhängt, so dass die folgende Ungleichung gilt,*

$$|\mathcal{T}_L| \leq |\mathcal{T}_0| + C_1(|\mathcal{M}_0| + \ldots + |\mathcal{M}_{L-1}|). \tag{A.4}$$

Der Beweis folgt nach Lemma A.5.6.

Bemerkung A.5.5. *Die Ungleichung in (A.4) kann auch umgeschrieben werden zu*

$$|\mathcal{T}_L| \leq |\mathcal{T}_0| + C_2 \sum_{\ell=1}^{L} |\mathcal{M}_{\ell-1}^{\ell}|. \tag{A.5}$$

Lemma A.5.6. *Sei $\mathcal{T}_0$ eine reguläre Triangulierung und $\mathcal{T}_L$ eine Verfeinerung von $\mathcal{T}_0$, welche durch das Verfeinern der markierten Kanten aus $\mathcal{M}_0, \ldots, \mathcal{M}_L$ mit Closure enstanden ist. $\mathcal{T}_L$ kann selbst hängende Knoten besitzen. Dann existiert eine reguläre Triangulierung $\mathcal{T}^*$, welche durch den Closure Algorithmus 2.6.1 erhalten wird und $\mathcal{T}_L$ vefeinert, so dass $\mathcal{T}^*$*

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}^*| &\leq |\mathcal{T}_0| + C_2|\mathcal{M}_0^L| \\ &\leq |\mathcal{T}_0| + C_3(|\mathcal{T}_L| - |\mathcal{T}_0|) \\ &\leq C_4|\mathcal{T}_L| \end{aligned} \tag{A.6}$$

erfüllt.

Beweis.
Jede Kante aus $\mathcal{M}_0 \cup \ldots \cup \mathcal{M}_{L-1}$ wurde verfeinert und daher gilt

$$\sum_{\ell=0}^{L-1} |\mathcal{M}_\ell| \leq 3|\mathcal{M}_0^L| \leq 3(|\mathcal{T}_L| - |\mathcal{T}_0|).$$

Dies eingesetzt in (A.5) ergibt (A.6). □

Beweis des Lemmas A.5.4

Der Beweis besteht aus zwei Schritten:

(A) Für alle $E \in \mathcal{M}_0^L$ gilt $\sum_{T \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_0} \Lambda(T, T(E)) \lesssim 1$ mit $T(E) = \{K \in \mathcal{T}_0 \cup \ldots \cup \mathcal{T}_L \mid E \text{ ist eine Kante von } K\}$. Falls $T(E)$ zwei Elemente K_1, K_2 enthält, dann steht $\Lambda(T, T(E))$ für $\Lambda(T, K_1) + \Lambda(T, K_2)$.

(B) Für alle $T \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_0$ gilt $1 \lesssim \sum_{E \in \mathcal{M}_0^L} \Lambda(T, T(E))$.

Aus (A)–(B) folgt dann direkt

$$|\mathcal{T}_L| - |\mathcal{T}_0| = |\mathcal{T}_L \setminus \mathcal{T}_0| = \sum_{T \in \mathcal{T}_L \setminus \mathcal{T}_0} 1 \overset{(B)}{\lesssim} \sum_{E \in \mathcal{M}_0^L} \sum_{T \in \mathcal{T}_L \setminus \mathcal{T}_0} \Lambda(T, T(E)) \overset{(A)}{\lesssim} \sum_{E \in \mathcal{M}_0^L} 1 = |\mathcal{M}_0^L|,$$

womit das Lemma A.5.4 bewiesen ist. Die einzelnen Beweise folgen in den Sätzen A.5.16 und A.5.17.

Definition A.5.7. *Das Verfeinerungslevel $\lambda(T)$ eines Elements $T \in \mathcal{T}_\ell$ definiert sich über ein Element $K \in \mathcal{T}_0$, welches T enthält, durch*

$$\lambda(T) := \log_2 \left(\frac{|K|}{|T|} \right).$$

Bemerkung A.5.8. *Bei NVB-Verfeinerungen entspricht das Verfeinerungslevel der Generation eines Elements, $\lambda(T) = gen(T)$.*

Definition A.5.9. *Die Nachbarschaftsabbildung $F(T)$ zu $T \in \mathcal{T}_\ell$ ist gegeben durch*

$$F(T) = \begin{cases} K & \text{falls } K \cap T = E(T),\ K \in \mathcal{T}_\ell \\ \emptyset & \text{falls } E(T) \in \partial\Omega, \end{cases}$$

wobei $E(T)$ die Referenzkante von T bezeichnet.

Definition A.5.10. *Die Kette $C(T)$ eines Elements $T \in \mathcal{T}_\ell$ ist eine Menge benachbarter Elemente,*

$$C(T) = \{T, F(T), \ldots, F^m(T)\},\ \text{so dass } F^{m+1}(T) \in \{\emptyset, F^1(T), \ldots, F^{m-1}(T)\}.$$

Satz A.5.11. *Für alle Elemente $T \in \mathcal{T}_\ell$ existieren Konstanten c_1, C_1 mit*

$$c_1^2 \cdot 2^{-2\lambda(T)} \leq |T| \leq C_1^2 \cdot 2^{-\lambda(T)}.$$

Die adaptive Finite Elemente Methode erfüllt die folgende Bedingung,

$$1 \leq \frac{\operatorname{diam}(T)^2}{|T|} \leq C^2 \Leftrightarrow |T| \leq \operatorname{diam}(T)^2 \leq c^2 |T|. \tag{A.7}$$

Dies zusammen mit Satz A.5.11 ergibt

Satz A.5.12. *Für alle Elemente $T \in \mathcal{T}_\ell$ existieren Konstanten c_1, C_1 mit*

$$c_1 \cdot 2^{-\lambda(T)} \leq \operatorname{diam}(T) \leq C_1 \cdot 2^{-\lambda(T)/2}. \tag{A.8}$$

Die Abbildung $\operatorname{diam}(T)$ *entspricht hier dem Außenradius des Dreiecks T.*

Beweis der Sätze A.5.11 und A.5.12.
Die Verfeinerung eines Elementes ergibt zwei bis vier Child-Elemente. Ist $\tilde{T}$ ein Parent-Element von T, dann gilt für die Verfeinerungslevel der beiden Elemente

$$\lambda(T) - \lambda(\tilde{T}) = \log_2 \left(\frac{|K|}{|T|} \right) - \log_2 \left(\frac{|K|}{|\tilde{T}|} \right) = \log_2 \left(\frac{|\tilde{T}|}{|T|} \right) \in \{1, 2\} \tag{A.9}$$

und daher

$$2^{-2}|\tilde{T}| \leq |T| \leq 2^{-1}|\tilde{T}|.$$

Dies zusammen mit Gleichung (A.7) ergibt Gleichung (A.8), da die Gleichung für alle Vorgänger von T gilt. □

Für Nachbarelemente T, K gilt $\lambda(T) - \lambda(K) \leq 3/2$ und daraus folgt

$$\begin{aligned} \lambda(T) - \lambda(F^q(T)) &\leq \underbrace{\lambda(T) - \lambda(F^1(T))}_{\leq 3/2} + \ldots + \underbrace{\lambda(F^{q-1}(T)) - \lambda(F^1(T))}_{\leq 3/2} \\ &\leq q \cdot 3/2. \end{aligned} \tag{A.10}$$

Satz A.5.13. *Für $m > 0$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{m-1} 2^{-k/2} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}.$$

Beweis.

$$\sum_{k=0}^{m-1} 2^{-k/2} = \sum_{k=0}^{m-1} \left(1/\sqrt{2}\right)^k = \frac{(1/\sqrt{2})^m - 1}{1/\sqrt{2}-1} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}.$$

□

Satz A.5.14. *Für $q < p < m$ gilt*

$$\operatorname{dist}(F^p(T), F^q(T)) \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \tilde{C}_1 2^{-\lambda(T)/2}.$$

Die Abstandsfunktion $\operatorname{dist}(T, K)$ *entspricht dabei dem kürzesten Abstand der Dreiecke.*

Beweis.
Es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(F^p(T), F^q(T)) &\leq \operatorname{diam}(F^{q+1}(T)) + \ldots + \operatorname{diam}(F^{p-1}(T)) \\
&= \sum_{k=1}^{p-q-1} \operatorname{diam}(F^{p-k}(T)) \\
&\overset{(A.8)}{\leq} \sum_{k=1}^{p-q-1} C_1 \cdot 2^{-\lambda(F^{p-k}(T))/2} \\
&\overset{(A.10)}{\leq} \sum_{k=1}^{p-q-1} \tilde{C}_1 2^{-(k+\lambda(T))/2} \\
&\leq \tilde{C}_1 2^{-\lambda(T)/2} \sum_{k=0}^{m} 2^{-k/2} \\
&\overset{\text{Th. } A.5.13}{\leq} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \tilde{C}_1 2^{-\lambda(T)/2}.
\end{aligned}$$

□

Definition A.5.15. *Sei* $\Lambda(T, K)$ *definiert durch*

$$\Lambda(T,K) := \begin{cases} (j-k+3)^{-2} & \text{falls } \lambda(T) = k,\ \lambda(K) = j,\ \operatorname{dist}(T,K) \leq A 2^{-k/2} \\ & \text{und } k \leq j+1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit der Konstante

$$A := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\tilde{C}_1 \sum_{j=-1}^{\infty} 2^{-j/4}.$$

Für beliebige Elemente K, T, für die $\Lambda(T,K) \neq 0$ erfüllt ist, gilt dann $(j-k+3)^{-2} < 1$, da $j-k+3 \geq 2$ ist.

Satz A.5.16 (Erste Eigenschaft von Λ)**.** *Für alle $E \in \mathcal{M}_0^L$ gilt*

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_L \setminus \mathcal{T}_0} \Lambda(T, T(E)) \lesssim 1.$$

Beweis.
Für eine gegebene Kante $E \in \mathcal{M}_0^L$ und für alle $K \in T(E)$ ist die Anzahl der Elemente $T \in \mathcal{T}_L$ mit $\lambda(T) \leq \lambda(K)+1$ und $\operatorname{dist}(T,K) \leq A2^{-k/2}$ beschränkt durch eine Konstante $\tilde{c}_2$. Dann gilt für alle $E \in \mathcal{M}_0^L$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_L \setminus \mathcal{T}_0} \Lambda(T, T(E)) \leq \tilde{c}_2 \sum_{j=0}^{\infty} (\underbrace{j-k+3}_{>1})^{-2} \leq c_2,$$

da $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-2}$ für $n > 1$ beschränkt ist. Damit erhält man die erste Eigenschaft. □

Satz A.5.17 (Zweite Eigenschaft von Λ)**.** *Für alle $T \in \mathcal{T}_L \setminus \mathcal{T}_0$ gilt*

$$1 \lesssim \sum_{E \in \mathcal{M}_0^L} \Lambda(T, T(E)).$$

Beweis.
Für $T \in \mathcal{T}_L \setminus \mathcal{T}_0$ sei $k := \lambda(T) \geq 1$. Definiere nun eine Folge von Elementen $K_1, \ldots, K_s$, so dass

i. jedes Element K_ν mindestens ein $E \in \mathcal{M}_0^L$ als Kante besitzt.

ii. $\lambda(K_\nu) \geq k-1$ für alle $\nu \in \{1, \ldots, s\}$.

iii. T ist ein Element von $\bar{C}(K_1)$, welches alle Elemente enthält, die durch eine *grün*-Verfeinerung von $C(K_1)$ entstanden sind.

iv. K_ν ist ein Element von $\bar{C}(K_{\nu+1})$.

v. $s \geq 2$ ist der minimale Index mit $\lambda K_s = k-1$.

Solch ein Index s muss existieren, da die *grün*-Verfeinerung eines Elementes das höchste Verfeinerungslevel der Kette maximal um eins erhöhen kann.

Für alle $j \geq -1$ sei $m(r,j)$ die Anzahl der Elemente K_ν mit $\lambda(K_\nu) = j+k$ und $\nu \leq r \leq s$.

Fall 1: Es existiert ein Index $j \geq -1$ mit $m(r,j) > 2^{j/4}$ für ein $r \in \{2,\dots,s\}$. Wähle j^* so, dass r^* das kleinste r mit dieser Eigenschaft ist. Dann gilt $m(r^*,j^*) > 2^{j^*/4}$. Daher gilt für alle $\nu < r^*$, dass $m(\nu,j) \leq 2^{j/4}$ für alle $j \geq -1$. Satz A.5.14 ergibt

$$\operatorname{dist}(K_{j-1},K_j) \quad \leq \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\tilde{C}_1 2^{-\lambda(K_j)/2}.$$

Mit $K_0 := T$ gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(T,K_\nu) &\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\tilde{C}_1 \sum_{\mu=1}^{\nu} 2^{-\lambda(K_\mu)/2} \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\tilde{C}_1 \sum_{j=-1}^{\infty} m(\nu,j) 2^{-(j+k)/2} \quad \text{for } \nu < r^* \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\tilde{C}_1 2^{-k/2} \sum_{j=-1}^{\infty} m(\nu,j) 2^{-j/2} \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\tilde{C}_1 2^{-k/2} \sum_{j=-1}^{\infty} 2^{-j/4} \\
&= A 2^{-k/2}.
\end{aligned}$$

Dann gilt für alle K_ν mit $\nu < r^*$, dass $\lambda(K_\nu) = r^* + k$ und daher

$$\Lambda(T,K_\nu) = (r^*+3)^{-2}.$$

Also existieren mindestens $2^{j^*/4}$ Elemente mit dieser Eigenschaft, und daraus folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{E \in \mathcal{M}_0^n} \Lambda(T,T(E)) &\geq 2^{j^*/4}(j^*+3)^{-2} \\
&\geq \frac{2^{1/4}}{36} =: c_3.
\end{aligned}$$

Fall 2: Für alle $j \geq -1$ gilt $m(s,j) \leq 2^{j/4}$. Dann

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(T,K_s) &\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\tilde{C}_1 \sum_{\mu=1}^{s} 2^{-\lambda(K_s)/2} \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\tilde{C}_1 \sum_{j=-1}^{\infty} m(s,j) 2^{-(j+k)/2} \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\tilde{C}_1 2^{-k/2} \sum_{j=-1}^{\infty} 2^{-j/4} \\
&= A 2^{-k/2}.
\end{aligned}$$

Da $\lambda(K_s) = k-1$ gilt $\Lambda(T,K_s) = 1$ und daher

$$\sum_{E \in \mathcal{M}_0^L} \Lambda(T,T(E)) \geq 1.$$

Beide Fälle ergeben damit die zweite Eigenschaft. □

Anhang

Notationen und Definitionen

Für Ungleichungen gilt die Notation $A \lesssim B$ für $A \leq cB$ und umgekehrt $A \gtrsim B$ für $A \geq cB$. Analog bedeutet $A \approx B$, dass $A \lesssim B$ und $A \gtrsim B$ erfüllt sind.

Normen und Oszillationen

Es gelten die folgenden *Normen*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega f^p dx\right)^{1/p} \text{ und}$$
$$\|f\|^2_{H(\mathrm{div};\Omega)} := \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\mathrm{div} f\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Die *Sobolev-Norm* definiert sich mit $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ für die *schwachen Ableitungen* $\partial^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}$ durch

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} \text{ für } 1 \leq p < \infty \text{ und}$$
$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \max_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \text{ für } p = \infty.$$

Das L^2*-Skalarprodukt* definiert sich durch

$$(f, g) := (f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega fg \; dx.$$

Die *Oszillation* ist definiert über

$$\begin{aligned} \mathrm{osc}_\ell^q &:= \sum_{z\in\mathcal{K}_\ell} \mathrm{osc}(f, \omega_z)^q, \quad \omega_z := \{x \in \Omega \mid \varphi_z(x) > 0\}, \\ \mathrm{osc}(f, \omega)^q &:= \mathrm{diam}(\omega)^q \|f - f_\omega\|^q_{L^q(\omega)} \text{ mit } f_\omega := |\omega|^{-1} \fint_\omega f \; dx. \end{aligned}$$

Kontinuierliche Funktionsräume

Die verwendeten *Funktionsräume* definieren sich durch

$$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\},$$
$$H(\mathrm{div};\Omega) := \{q \in L^2(\Omega) \mid \mathrm{div} q \in L^2(\Omega)\} \; .$$

Der Index *loc* bei den Räumen bedeutet, dass die jeweilige Eigenschaft nur lokal gelten muss, also für alle Teilräume $\omega \subset\subset \Omega$.

Die benutzten *Sobolev-Räume* definieren sich über

$$W^{m,p}(\Omega) := \{f \in L^1_{loc}(\Omega) \mid \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} < \infty\},$$
$$H^1 := W^{1,2}.$$

Der Index D bei einem Sobolev-Raum steht für den ausschließlichen Dirichlet-Rand der Funktionen des Raums; der Index 0 bedeutet, dass die Funktionen in dem Raum einen Nullrand besitzen.

Diskrete Funktionsräume

Die diskreten *Polynomräume* sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_k(T) &:= \{\text{Polynome auf } T \text{ mit Grad} \le k\},\\
\mathrm{P}_k(\mathcal{T}) &:= \{f \in L^2(\Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T},\ f|_T \in \mathrm{P}_k(T)\},\\
\mathrm{P}_0(\mathcal{T}) &:= \{v \in L^2(\Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T}\ \exists a \in \mathbb{R}\ \forall x \in T,\ v(x) = a\},\\
\mathrm{P}_1(\mathcal{T}) &:= \{v \in L^2(\Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T}\ \exists a, b \in \mathbb{R}\ \forall x \in T,\ v(x) = ax + b\}.
\end{aligned}$$

Die diskreten *Raviart-Thomas-Räume* definieren sich über

$$\begin{aligned}
\mathrm{RT}_k(T) &:= \left\{(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} p_1(x,y) \\ p_2(x,y) \end{pmatrix} + p_3(x,y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; p_1, p_2, p_3 \in \mathrm{P}_k(T)\right\},\\
\mathrm{RT}_k(\mathcal{T}) &:= \{p \in L^\infty(\Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T},\ p|_T \in \mathrm{RT}_k(T)\},\\
\mathrm{RT}_0(\mathcal{T}) &:= \big\{p \in H(div;\Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T}\ \exists a \in \mathbb{R}^2\ \exists b \in \mathbb{R}\ \forall x \in T,\ p(x) = a + bx \text{ und}\\
&\qquad p|_{T_1} \cdot \nu_E = p|_{T_2} \cdot \nu_E \text{ für alle Kanten } E = T_1 \cap T_2\big\}.
\end{aligned}$$

Triangulierung

$\mathcal{T}$ ist eine *Triangulierung* von Ω, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1) $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$,
2) $\bigcup \mathcal{T} = \bigcup_{j=1}^n T_j = \bar{\Omega}$ und
3) $T_j \cap T_k$ ist entweder leer oder enthält einen Punkt, eine Kante oder das Element $T_j = T_k$.

$\mathcal{E}_\ell$ ist die Menge aller Kanten der Triangulierung und $\mathcal{M}_\ell$ die Menge aller markierten Kanten. $\mathcal{N}_\ell$ ist die Menge aller Knoten der Triangulierung, d.h. aller Ecken der Elemente $T \in \mathcal{T}$. Die Menge $\mathcal{K}_\ell \subseteq \mathcal{N}_\ell$ ist die Menge aller freien Knoten, d.h. aller Knoten, die nicht auf dem Dirichlet-Rand liegen.

Für eine Dreieck $T \in \mathcal{T}$ wird das Paar $(T, \mathrm{P}_k(T))$ ein P_k-*Finites Element* genannt.

Standardabschätzungen

Minkowski Ungleichung
Für $1 \leq p \leq \infty$ und $f, g \in L^p(\Omega)$ gilt

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Hölder Ungleichung
Sei $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$. Falls $f \in L^p(\Omega)$ und $g \in L^q(\Omega))$, gilt

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Für $p = q = 2$ ist diese Aussage als *Schwarz Ungleichung* bekannt.

Programmablauf

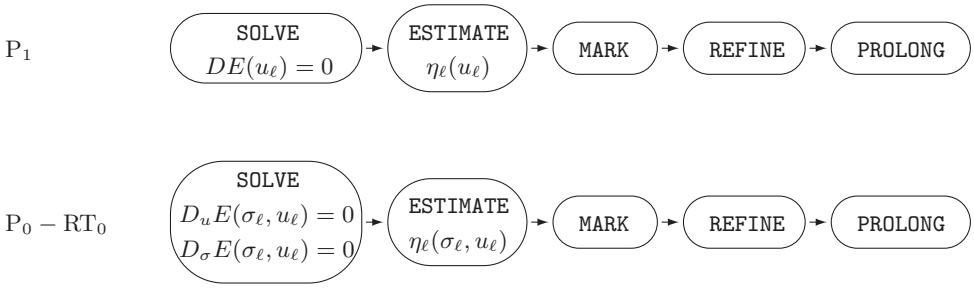


Abbildung A.15: Grober Programmablauf für P_1 *und* $\mathrm{P}_0 - \mathrm{RT}_0$.

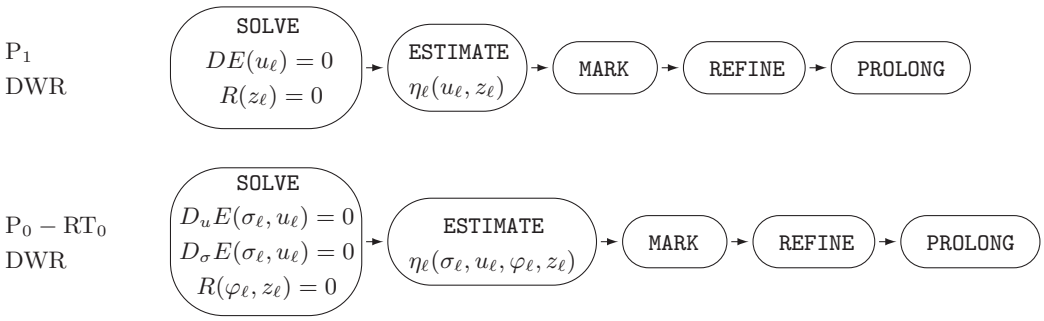


Abbildung A.16: Grober Programmablauf für P_1 *und* $\mathrm{P}_0 - \mathrm{RT}_0$ *mit primaler Lösung* u_ℓ *und dualer Lösung* z_ℓ.

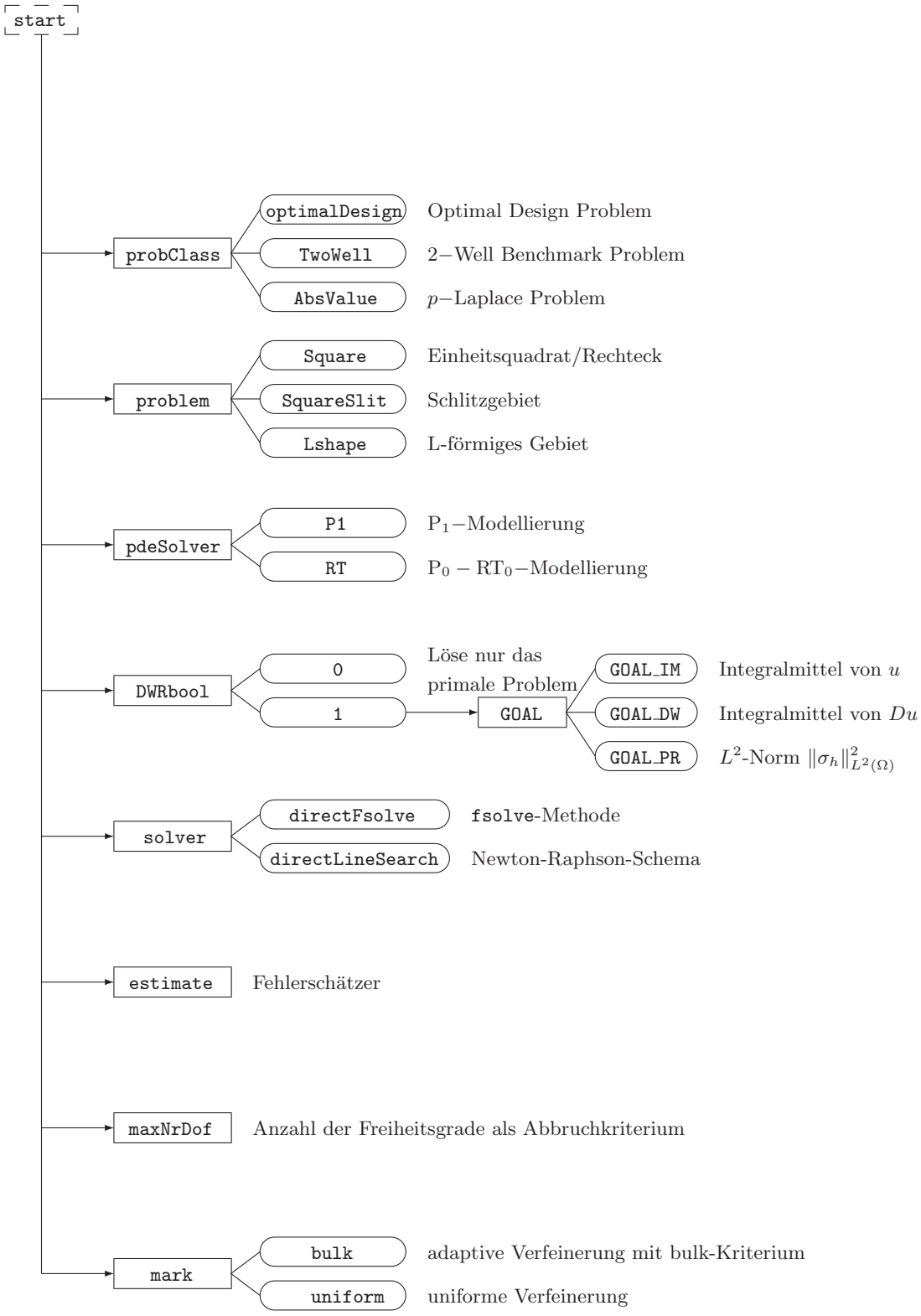


Abbildung A.17: Auswahlmöglichkeiten in der Datei `start.m`*. Die Geometrie* `Square` *ist bei dem 2-Well Benchmark Problem als Rechteck der Form* $[0,1] \times [0,1.5]$ *gegeben, bei den beiden anderen Beispielen als Einheitsquadrat* $[0,1] \times [0,1]$*.*

Hauptfunktionen des Programms

An dieser Stelle werden nur die Hauptfunktionen des Programmes kurz erklärt, welches mit Matlab programmiert wurde. Eine ausführliche Einführung für das Programmpaket F_FW, auf dem das Programm dieser Diplomarbeit aufbaut, kann [13] entnommen werden. Diese Einführung befindet sich zusammen mit dem Programmcode auf der beiliegenden CD.

`startDWR.m`

In der Start-Funktion wird das Problem mit sämtlichen Parametern und das Lösungsverfahren ausgewählt. Außerdem kann die Markierungsstrategie (`bulk` oder `uniform`) und die Anzahl der Freiheitsgrade (`maxNrDof`) als Abbruchkriterium gewählt werden. Die Funktion kann mit mehreren optionalen Parametern direkt von der Matlab-Oberfläche aus aufgerufen werden. Für Vergleichszwecke kann das Skript `start.m` oder `startLambda.m` zum mehrfachen Aufruf der Datei `startDWR.m` und damit des Programms benutzt werden.

`run.m`

Diese Funktion wird abhängig von dem benutzten Löser (z.B. `TWP1run.m` für 2-Well Benchmark, P_1-Modellierung) aufgerufen.

In dieser Funktion werden die benötigten Basisfunktionen definiert und das Lösungsverfahren (z.B. `fsolve`) aufgerufen.

`directFsolve.m/directLineSearch.m`

Diese Funktion startet den AFEM Algorithmus und ruft in einer Schleife zuerst die Schritte `Mark`, `Refine` und `Prolong` auf. Dann wird die Nullstelle von $DR(u)$ bzw. $DR(\sigma, u)$ mithilfe der Matlab-Funktion `fsolve` oder dem Newton-Raphson-Schema bestimmt. Danach werden noch `Postproc` und `Estimate` aufgerufen, bevor die Schleife erneut durchlaufen wird.
Soll zusätzlich zu dem primalen Problem auch das duale Problem berechnet werden, wird das duale Problem in dieser Funktion aufgerufen und ebenfalls gelöst.

`bulk.m/uniform.m`

Die Markierung der Kanten erfolgt in den Dateien `bulk.m` bzw. `uniform.m`. Bei der uniformen Verfeinerung werden alle Kanten markiert, so dass im Schritt `refine` alle Kanten halbiert werden. Bei der adaptiven Verfeinerung wird das Bulk-Kriterium aus Abschnitt 2.3 angewendet.
Die Markierung hängt von den Fehlerschätzern ab, welche in dem AFEM Algorithmus nicht nur auf Kanten, sondern auch auf Elementen definiert sind. Die Markierung der mittels des Bulk-Kriteriums ausgewählten Elemente wird durch die Markierung aller Kanten dieser Elemente realisiert.

`redGreenBlue.m`

Die Verfeinerung der markierten Kanten wurde in Abschnitt 2.4 beschrieben. Nach der Verfeinerung der markierten Kanten, welche durch den Closure-Algorithmus 2.3.2 entstehen, wird die Geometrie (bestehend aus den Koordinaten der Knoten, Knoten der Elemente und Kanten, Dirichlet- und Neumann-Kanten sowie der neuen Parent-Child-Beziehungen) aktualisiert.

`drawError.m`

In dieser Datei werden die Fehler für die grafische Ausgabe vorbereitet. An dieser Stelle wird bestimmt, dass die Fehler des 2−Well Benchmark Problems in der $L^{4/3}-$Norm statt der L^2-Norm ausgegeben werden.

`prolong.m`

Beide Netwon-Lösungsverfahren zur numerischen Bestimmung von Nullstellen einer Funktion benötigen sehr viele Rechenschritte, um in die Nähe der Lösung zu gelangen. Durch eine Prolongation wird die Lösung des vorigen Levels auf das neue Level (bzw. auf die neue Geometrie) projiziert. Mit diesem prolongierten Startwert wird die Anzahl der benötigen Lösungsschritte stark verringert.

`postProc.m`

Bei der Nachbearbeitung der Daten (dem Post-Processing) werden ausgehend von der diskreten Lösung x_ℓ (welche die Daten für u_ℓ und evt. auch σ_ℓ bei der $\mathrm{P}_0-\mathrm{RT}_0-$Modellierung enthält) element- und knotenweise alle weiter benötigten Funktionen wie z.B. Glättungen bezüglich der primalen und dualen Lösung ausgewertet. Diese werden in `getUhFuncs` und `getPhFuncs` weiter verarbeitet.

`getUhFuncs.m`

Ausgehend von den Daten aus `postProc` werden die diskrete Lösung u_ℓ, deren Gradient Du_ℓ sowie die Glättungsfunktionen $A(u_\ell)$ und $A(Du_\ell)$ berechnet. Weiterhin werden die entsprechenden dualen Funktionen für z_ℓ berechnet.

`getPhFuncs.m`

Hier werden die Spannung σ_ℓ und deren Glättung $A(\sigma_\ell)$ mittels der Daten aus `postProc` berechnet.

`estimate.m`

Nach dem Lösen des Problems und der Nachbearbeitung der Daten in `postProc`, `getUhFuncs` und `getPhFuncs` wird der Fehlerschätzer bestimmt, welcher für die Markierung der zu verfeinernden Kanten benötigt wird. Der Fehlerschätzer gibt den approximierten Fehler auf den Kanten und/oder Elementen an.

Literaturverzeichnis

[1] J. Alberty, C. Carstensen und S.A. Funken. Remarks around 50 lines of matlab: short finite element implementation., *Numer. Algorithms*, 1999, **20**:117-137.

[2] W. Bangerth und R. Rannacher. *Adaptive finite element methods for differential equations.* Lectures in Mathematics, ETH Zürich, 2003, Birkhäuser.

[3] C. Bahriawati und C. Carstensen. Three Matlab implementations of the lowest-order Raviart-Thomas MFEM with a posteriori error control. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2005, **5**:333–361.

[4] S. Bartels und C. Carstensen. A convergent adaptive finite element method for an optimal design problem. *Preprint 06-20*, 2006, Humboldt Universität zu Berlin.

[5] S. Bartels and C. Carstensen. Each averaging technique yields reliable a posteriori error control in FEM on unstructured grids. Part1: Low order conforming, nonconforming, and mixed FEM. *Math. Comp.*, 2002, **71**:945–969.

[6] S. Bartels and C. Carstensen. Each averaging technique yields reliable a posteriori error control in FEM on unstructured grids. Part2: Higher order FEM. *Math. Comp.*, 2002, **71**:971–994.

[7] S. Bartels, C. Carstensen, P. Plecháč und A. Prohl. Convergence for stabilisation of degenerately convex minimisation problems. *IFB*, 2004, **6**(2):253–269.

[8] R. Becker und R. Rannacher. An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods. *Acta Numerica 2000*, Cambridge University Press, 2001:1–102.

[9] Binev, P. and Dahmen, W. and DeVore, R. *Adaptive finite element methods with convergence rates.* Numer. Math., (2004) **97**: 219–268.

[10] D. Braess. *Finite Elemente*, Springer-Verlag, 2000.

[11] Brenner, S.C. and Carstensen, C. *Encyclopedia of Computational Mechanics. Chapter 4: Finite Element Methods.* John Wiley and Sons, 2004.

[12] S.C. Brenner und L.R. Scott. *The mathematical theory of finite element methods.* Texts in Applied Mathematics, 1994, Springer-Verlag.

[13] A. Byfut, J. Gedicke, D. Günther, H. Mellmann, J. Reininghaus und S. Wiedemann. *FFW documentation*, 2007.
Website: `http://www.math.hu-berlin.de/~ffw/ffw_content.php`.

[14] C. Carstensen. All first-order averaging techniques for a posteriori finite element error control on unstructured grids are effcient and reliable. *Math. Comp.*, 2004, **73**:1153–1165.

[15] Carstensen, C. An adaptive mesh-refining algorithm allowing for an H^1-stable L^2-projection onto Courant finite element spaces. *Constr. Approx.*, 2004, **20**:549–564.

[16] C. Carstensen. A unifying theory of a posteriori finite element error control, *Numer. Math.*, 2005, **100**:617-637.

[17] C. Carstensen. Estimation of higher Sobolev norm from lower order approximation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2005, **42**(5):2136–2147.

[18] C. Carstensen. Convergence of adaptive FEM for a class of degenerate convex minimization problems. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2007:1–17.

[19] C. Carstensen. Time-space discretization of the nonlinear hyperbolic system $u_tt = \mathrm{div}(\sigma(Du) + Du_t)$. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2004, **42**, 75–89.

[20] C. Carstensen und J. Gedicke. An oscillation-free adaptive FEM for symmetric eigenvalue problems, *Preprint 489*, DFG Research Center Matheon, Berlin, Germany, 2008.

[21] C. Carstensen und K. Jochimsen. Adaptive Finite Element Methods for Microstructures? Numerical Experiments for a 2-Well Benchmark. *Computing*, 2003, **71**:175–204.

[22] C. Carstensen und S. Müller. Local stress regularity in scalar non-convex variational problems. *SIAM J. Math. Anal.*, 2002, **34**:495-509.

[23] C. Carstensen und P. Plecháč. Numerical solution of the scalar double-well problem allowing microstructure. *Math. Comp.*, 1997, **66**(219):997-1026.

[24] C. Carstensen und R. Verfürth. Edge residuals dominate a posteriori error estimates for low order finite element methods, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1999, **36**(5):1571-1587.

[25] Cascon, J.M. and Kreuzer, C. and Nochetto, R.H. and Siebert, K.G. *Quasi-Optimal Convergence Rate for an Adaptive Finite Element Method.* Preprint, Universität Augsburg, 2007, 009/2007.

[26] B. Dacorogna. *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Springer, 1989.

[27] L.C. Evans. *Partial differential equations*, American Mathematical Society, 2000.

[28] I. Fragalá, F. Gazzola und B. Kawohl. Existence and nonexistence results for anisotropic quasilinear elliptic equations. *Annales de lInstitut Henri Poincare*, 2004, **21**(5):715–734.

[29] D. Günther. *Ein gemischter Finite Elemente Ansatz für ein nichtlineares Optimal Design Problem.* Diplomarbeit, 2007, Humboldt Universität zu Berlin.

[30] Hartmann, P. (1999). *Mathematik für Informatiker.* Vieweg, 2006.

[31] B. Kawohl. *Optimal Shape Design. Chapter 1: Some nonconvex shape optimization problems.* Springer Lecture Notes, 2000.

[32] B. Kawohl und C. Schwab. Convergent finite elements for a class of nonconvex variational problems. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 1998, **18**:133–149.

[33] B. Kawohl, J. Stara und G. Wittum. Analysis and numerical studies of a problem of shape design. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1991, **114**:349363.

[34] P. Knabner und L. Angermann. *Numerik partieller Differentialgleichungen*, Springer-Verlag, 2000.

[35] P. Morin, R.H. Nochetto und K.G. Siebert. Data oscillation and convergence of adaptive FEM, *SIAM J. Numer. Anal.*, 2000, **38**(2):466-488.

[36] S. Repin. A posteriori error estimation for variational problems with uniformly convex functionals, *Math. Comp.*, 1999, **69**(230):481-500.

[37] R. Stevenson. Optimality of a standard adaptive finite element method, *Foundations of Computational Mathematics*, 2007, **7**(2):245-269.

[38] R. Stevenson. The completion of locally refined simplicial partitions created by bisection, *Mathematics of Computation*, 2008, **77**(261):227-241.

[39] R. Verfürth. *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh refinement techniques.* Wiley/Teubner, 1996.

[40] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. Part 3: Variational Methods and Optimization.* Springer, 1985.

[41] O.C. Zienkiewicz und J.Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique, *Int. J. for Numer. Methods in Engineering*, 1992, **33**:1331-1364.

Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, den 12. September 2008

Lena Noack

Einverständniserklärung

Hiermit erkläre ich mich einverstanden, dass ein Exemplar meiner Diplomarbeit in der Bibliothek des Instituts für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin verbleibt.

Berlin, den 12. September 2008

Lena Noack